Prova di Matematica 2018

Esercizio 1
a) Consideriamo l'insieme $Q = \{a^2 \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$ di tutti i quadrati degli interi. Per ogni primo dispari p, sia R_p l'insieme dei resti delle divisioni degli elementi di Q per p. Dimostrare che R_p ha esattamente $\frac{p+1}{2}$ elementi.
b) Dimostrare che per ogni primo dispari p esistono due interi a e b tali che p divide $a^2 + b^2 + 4$.
c) Per ogni primo dispari p, sia F_p l'insieme dei numeri interi positivi n tali che np è somma di quattro quadrati di interi (non necessariamente distinti, e ricordiamo che anche 0 è un quadrato). Mostrare che F_p non è vuoto e che il suo elemento più piccolo m soddisfa $m < p$.

Esercizio 2
Consideriamo la successione di numeri reali definita da $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}$$

per ogni $n \geq 1$.
a) Dimostrare che la successione è crescente.
b) Calcolare $\lim_{n \to +\infty} (a_n - \sqrt{n})$.

Esercizio 3
a) Trovare tutte le funzioni continue $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che per ogni coppia $x, y \in \mathbf{R}$ vale

$$g(x) + g(y) = g(x + y)$$

b) Trovare tutte le funzioni continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che per ogni coppia $x, y \in \mathbf{R}$ vale

$$f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Esercizio 4
Sui lati AB e AD di un rombo $ABCD$ consideriamo rispettivamente i punti E ed F tali che AE e DF abbiano uguale lunghezza. Le rette per BC e DE si intersecano in P, quelle per CD e BF si intersecano in Q.
Calcolare $\dfrac{PE}{PD} + \dfrac{QF}{QB}$. Dire se è vero o falso che i punti P, A e Q sono allineati.
[In questo testo, la notazione XY può indicare sia un segmento sia la sua lunghezza, dato che non ci sono ambiguità.]

Esercizio 5
Il tetraedro regolare e l'ottaedro regolare sono due solidi platonici. Il tetraedro ha 4 facce, 6 spigoli e 4 vertici mentre l'ottaedro ha 8 facce, 12 spicoli e 6 vertici.
Sia P un tetraedro regolare con spigolo lungo 1. Sia Q un cubo i cui centri delle 6 facce coincidano con i 6 punti medi degli spigoli di P. Sia infine R un ottaedro regolare con una faccia ABC coincidente con una faccia del tetraedro e disposto in maniera tale che i

punti del triangolo ABC sia gli unici punti in comune tra il tetraedro P e l'ottaedro Q.
(a) Calcolare il volume del cubo Q.
(b) Determinare numerosità, forma e dimensioni dei poliedri che si ottengono eliminando dal cubo Q i punti del tetraedro P.
(c) Qual è la distanza massima che si può avere tra un vertice del cubo Q e un vertice dell'ottaedro R?

Esercizio 6
Piero dispone su una scacchiera 4×4 alcune monete d'oro. Poi Sara sceglie una riga, una colonna ed una diagonale della scacchiera e prende tutte le monete che si trovano su quella riga, quella colonna e quella diagonale. Sia n il minimo numero di monete che Piero deve disporre sulla scacchiera per essere sicuro che, dopo il "furto" di Sara, ne rimanga almeno una. (`Nota: ci sono 14 diagonali possibili. 2 diagonali sono lunghe 4, 4 sono lunghe 3, 4 sono lunghe 2 e 4 sono lunghe 1.`)
(a) Fornire una stima dal basso su n argomentando la risposta.
(b) Fornire una stima dall'alto su n disegnando la configurazione che realizza la stima.

Tracce delle soluzioni della prova di Matematica 2018

Esercizio 1

Traccia della risoluzione (senza usare il linguaggio delle congruenze): per il punto a) si osserva per prima cosa che i resti in questione sono al massimo $\frac{p+1}{2}$. Infatti basta controllare i resti di a^2 per $a = 0, ..., p-1$, visto che gli altri numeri differiscono per multipli di p. Inoltre il resto di 1^2 è uguale a quello di $(p-1)^2$, quello di 2^2 è uguale a quello di $(p-2)^2$...e così via, dunque abbiamo al massimo $\frac{p+1}{2}$ resti distinti.

D'altra parte, se a^2 e b^2 (con $a, b \in \{0, ..., p-1\}$) danno lo stesso resto, allora p divide $a^2 - b^2$. Questo equivale a dire che p divide $a - b$ (impossibile perché $a, b \in \{0, ..., p-1\}$) oppure p divide $a + b$. Quest'ultimo caso accade solo se $b = p - a$ dunque le uniche coincidenze di resti sono quelle già osservate in precedenza. I resti sono allora esattamente $\frac{p+1}{2}$.

Per il punto b) osserviamo che p divide $a^2 + b^2 + 4$ se e solo se il resto della divisione per p di a^2 è uguale al resto di $-b^2 - 4$.

Ora come abbiamo visto nel punto a) i possibili resti di a^2 sono l'insieme R_p di cardinalità $\frac{p+1}{2}$, e analogamente anche i possibili resti di $-b^2-4$ sono un insieme R'_p di cardinalità $\frac{p+1}{2}$. Tutti i resti possibili sono un insieme di cardinalità p, dunque l'intersezione fra R_p e R'_p è non vuota. Esistono allora un a e un b tali che p divide $a^2 + b^2 + 4$.

Per il punto c) si osserva innanzitutto che, grazie al punto precedente, possiamo concludere che F_p non è vuoto. Infatti esiste n intero positivo tale che

$$np = 4 + a^2 + b^2 = 0^2 + 2^2 + a^2 + b^2 \tag{1}$$

Se nella equazione (1) a e b hanno modulo $\leq \frac{p}{2}$ possiamo scrivere $np = 4+a^2+b^2 \leq 4+\frac{p^2}{2}$, da cui si deduce $n < p$, per cui anche il minimo m di F_p è minore di p.

Se nella equazione precedente a o b hanno modulo $> \frac{p}{2}$ li sostituiamo con a' e b' che hanno rispettivamente lo stesso resto di a e b ma hanno modulo $\leq \frac{p}{2}$. Supponiamo di sostituire entrambi i numeri (il caso in cui se ne deve sostituire uno solo è del tutto analogo). Il numero $4 + (a')^2 + (b')^2$ è ancora multiplo di p: sarà uguale a $n'p$ con $n' < n$. Per questo n' si può ripetere la considerazione precedente, e scoprire che è $< p$, da cui segue $m < p$.

Esercizio 2

Traccia della risoluzione: la successione è a termini positivi. I primi esempi suggeriscono che è crescente. Osserviamo che $a_{n+1} \geq a_n$ equivale a

$$1 + \frac{n}{a_n} \geq a_n$$

che a sua volta equivale a

$$a_n^2 - a_n - n \leq 0$$

Il polinomio $x^2 - x - n$ ha le due radici $\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ per cui, dato che i termini della successione sono positivi, $a_{n+1} \geq a_n$ equivale a

$$a_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}$$

Inoltre osserviamo che se a_n soddisfa la relazione sopra allora

$$a_{n+1} \geq 1 + \frac{2n}{1+\sqrt{1+4n}} = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} = \frac{1+\sqrt{4(n+1)-3}}{2}$$

Queste considerazioni suggeriscono di provare a dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale

$$\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < a_n < \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$

Il passo base è immediato. Per il passo induttivo, innanzitutto il conto già fatto mostra che, prese per buone le disuguaglianze per a_n, allora a_{n+1} soddisfa la $a_{n+1} > \frac{1+\sqrt{4(n+1)-3}}{2}$. D'altra parte, utilizzando la disuguaglianza di sinistra dell'ipotesi induttiva per a_n, vale

$$a_{n+1} < 1 + \frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}}$$

Con un conto si mostra che per $n \geq 2$ vale

$$1 + \frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} < \frac{1+\sqrt{1+4(n+1)}}{2}$$

il che termina l'induzione.

Le disuguaglianze appena dimostrate implicano che la successione a_n è crescente.

Sottraendo $\sqrt{n}$ abbiamo le disuguaglianze

$$\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} - \sqrt{n} < a_n - \sqrt{n} < \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} - \sqrt{n}$$

I limiti per $n \to +\infty$ dei membri di sinistra e di destra valgono entrambi $\frac{1}{2}$ che è dunque il limite cercato.

Esercizio 3

Traccia risoluzione: per la parte *a*) le funzioni sono quelle lineari $g(x) = \alpha x$ come si ricava con argomenti abbastanza semplici (si verifica che $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ prima per i λ razionali, poi usando la continuità; a quel punto se $g(1) = \alpha$ segue che per ogni x $g(x) = g(x \cdot 1) = xg(1) = x\alpha$).

Per la parte *b*) innanzitutto $f = 0$ va bene. Sia dunque $f \neq 0$ una funzione continua che soddisfa la condizione richiesta. In particolare esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $f(a) \neq 0$, dunque per ogni x si può scrivere

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{f(a)}$$

da cui si vede che f è una funzione pari. Dunque basterà studiare la restrizione di f a $\mathbf{R}^{\geq 0}$.

Innanzitutto si osserva, ponendo $x = y = 0$ che $f(0)^2 = f(0)$, allora $f(0) = 0$ oppure $f(0) = 1$. Nel primo caso si ricava subito $f = 0$, che non ci interessa perché abbiamo supposto $f \neq 0$.

Dunque $f(0) = 1$ e possiamo mostrare che f non ha altri zeri. Infatti ponendo $x = y$ si ottiene

$$f(x)^2 = f(\sqrt{2}x)$$

per ogni x. Allora se x_0 fosse uno zero per f, lo sarebbe anche $\frac{x_0}{\sqrt{2}}$ e, iterando, anche $\frac{x_0}{\sqrt{2}^n}$ per ogni $n > 0$. La successione $\frac{x_0}{\sqrt{2}^n}$ tende a 0, e dunque per continuità dovrebbe valere $f(0) = 0$, assurdo.

Ha senso allora definire in $\mathbf{R}^{\geq 0}$ la funzione $g(x) = \ln f(\sqrt{x})$. Questa funzione soddisfa

$$g(x^2) + g(y^2) = g(x^2 + y^2)$$

ovvero

$$g(X) + g(Y) = g(X + Y)$$

per ogni $X, Y \in \mathbf{R}^{\geq 0}$. Da questa equazione, per la parte a) (il ragionamento resta valido restringendo a $\mathbf{R}^{\geq 0}$) si ricava che g è della forma

$$g(X) = \alpha X$$

Esponenziando e ricordando che f è pari si ricava

$$f(x) = e^{\alpha x^2}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$. La verifica che le funzioni di questo tipo soddisfano la condizione richiesta è immediata.

Esercizio 4

Traccia della risoluzione: sia $AE = DF = x$ e sia y la lunghezza del lato del rombo. Dato che BE è parallelo a CD vale:

$$\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD}$$

Dato che DF è parallelo a BC vale:

$$\frac{QF}{QB} = \frac{FD}{BC}$$

Allora

$$\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = \frac{BE}{CD} + \frac{FD}{BC} = \frac{y - x}{y} + \frac{x}{y} = 1$$

Sempre dal fatto che DF è parallelo a BC segue

$$\frac{QF}{QB} = \frac{FD}{BC} = \frac{EA}{AB}$$

da cui per il teorema di Talete ricaviamo che EF è parallelo ad AQ.

Analogamente, dal fatto che BE è parallelo a CD segue

$$\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD} = \frac{AF}{AD}$$

da cui per il teorema di Talete ricaviamo che EF è parallelo ad AP.

Dunque AP è parallelo ad AQ, il che implica che A, P, Q sono allineati.

Esercizio 5

(a) Siano A, B, C e D i 4 vertici del tetraedro. Per calcolare il volume del cubo è sufficiente conoscere la lunghezza del lato ovvero la distanza tra i centri di due facce opposte. Indichiamo M_{AB} il punto medio del segmento AB e con M_{AC}, M_{BC}... gli altri punti medi.

(Il baricentro dei punti medi è lo stesso dei vertici del tetraedro, quindi cubo e il tetraedro hanno lo stesso centro.)

Le tre coppie di punti opposti rispetto al centro del tetraedro sono (M_{AB},M_{CD}), (M_{AC},M_{BD}) e (M_{AD},M_{BC}). Occorre calcolare la distanza tra M_{AB} e M_{CD}.

Consideriamo il triangolo equilatero ABC si ha $\overline{CM_{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Per simmetria vale anche $\overline{DM_{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consideriamo il triangolo isoscele CDM_{AB} si ha $\overline{M_{CD}M_{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$Volume(Q) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(b) Consideriamo la faccia associata al punto medio M_{AB} questa contiene il punto M_{AB} ed è ortogonale al segmento $M_{CD}M_{AB}$. Quindi il piano associato a tale faccia contiene il punto A. Allo stesso modo i piani contenenti le facce con punti M_{AC} e M_{AD} contengono il punto A. Dunque A è uno dei vertici del cubo. In maniera analoga si deduce che i punti A, B, C e D sono quattro vertici del cubo, gli spigoli del tetraedro sono 6 diagonali delle sei facce del cubo. Il teatraedro è contenuto nel Cubo. Rimuovendo i punti del tetraedro dal cubo si ottengono 4 piramidi rette (una per ognuno dei vertici restanti) con base triangoli equilateri di lato 1 e spigoli laterali lunghi $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Siano E, F e G i vertici dell'ottaedro opposti ai vertici A, B e C e sia O il centro dell'ottaedro. I segmenti AO, BO e CO sono ortogonali tra di loro quindi il punto O è un vertice del cubo Q e i segmenti AO, BO e CO sono tre dei suoi spigoli. A questo punto è chiara la disposizione reciproca dei vertici del cubo e dell'ottaedro. Denotiamo con H il vertice del cubo opposto al vertice O. La distanza massima è quello tra H ed uno dei punti E, F o G. Applicando il teorema di pitagora si ottiene:

$$\overline{HE} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Esercizio 6

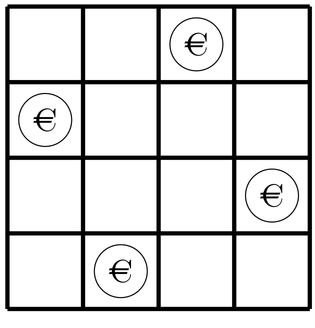
Per i questiti (c) e (d) che seguono supporre invece che Sara scelga una riga, una colonna e due diagonali una crescente ed una decrescente.

(c) Fornire una stima dal basso su n argomentando la risposta.

(d) Fornire una stima dall'alto su n disegnando la configurazione che realizza la stima.

(a) Tre monete non possono bastare. Se Piero dispone 3 monete sulla scacchiera allora Sara potrà scegliere una riga contenente la prima moneta una colonna contenente la seconda ed una diagonale contenente la terza e prendere tutte le monete. Quindi si dovrà avere $n \geq 4$.

(b) La configurazione esposta in figura con 4 monete non può essere ricoperta con una colonna una riga ed una sola diagonale.



(c) Mostreremo che a Piero non sono sufficienti 6 monete per essere certo che ne resti almeno 1. La dimostrazione non è banale ed occorrerà considerare i vari casi. Supponiamo che Piero disponga 6 monete sulla scacchiera.

Se Piero dispone 3 monete sulla stessa riga allora Sara potrà scegliere quella riga per raccogliere 3 monete e poi utilizzare le restanti diagonali e la colonna per

raccogliere le ultime 3 monete. Lo stesso
ragionamento vale se ci fossere 3 monte su un'unica colonna e su un'unica diagonale.

Quindi possiamo limitarci a considerare il caso in cui non ci sono 3 monete su un'unica riga né su un'unica colonna né su un'unica diagonale. Dunque supponiamo che Piero abbia disposto le monete in modo che su ciascuna colonna o riga ce ne siano al più due. Quindi le monete sulle colonne sono distribuite o secondo (2,2,1,1) oppure (2,2,2,0). Il caso in cui le colonne siano distribuite secondo (2,2,2,0) si esclude rapidamente: consideriamo una riga con due monete questa riga non può intersecare tutte e tre le colonne da 2 con una monete. se consideriamo questa riga e la colonna non intersecata allora esse ricoprono 4 monete e dunque è possibile raccogliere le altre due monete con le diagonali.

Ci siamo ridotti a considerare il caso in cui le monete sono distribuite sulle colonne e sulle righe c con numerosità (2,2,1,1). Per l'argomento precedente inoltre le righe e le colonne con due monete devono intersecarsi per forza in una casella con moneta. I casi possibili ora si sono di ridotti. Indichiamo con le lettere A, B, C, D, E e F le sei monete. Siano A e B sulla stessa riga, siano C e D sulla stessa riga. A e C sulla stessa colonna e B e D sulla stessa colonna. Quindi E ed F saranno le monete uniche sulla loro colonna o riga.

Cosideriamo ora le diagonali, se A e D si trovano sulla stessa diagonale allora anche B e C si trovano sulla stessa diagonale, scegliendo queste due diagonali avrei raccolto 4 monete utilizzando solo due operazioni. Se A fosse sulla stessa diagonale di E o F allora questa diagonale più la colonna passante per B e D raccoglierebbero 4 monete. Allo stesso modo le monete B, C, D, E ed F non possono trofarsi su una stessa diagonale. Quindi due monete non si possono trovare sulla stessa diagonale. affinché non ci siano monete sulle stessa diagonale allora si verifica facilmente che non ci possono essere monete nelle 4 caselle centrali.

I casi con 6 monete senza monete sulla stessa diagonale sono pochissimi e si verifica facilmente che non vanno bene.

(d) La figura sottostante mostra che 7 bastano.