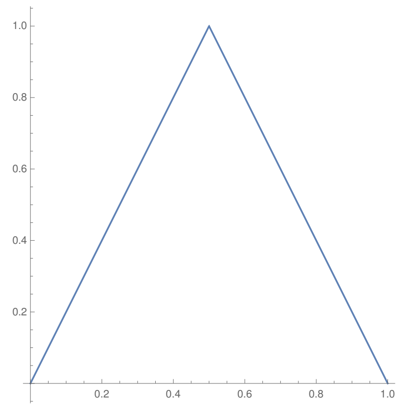
Scuola Galileiana di Studi Superiori
Classe di Scienze Naturali - A. A. 2016-2017
Prova scritta di matematica

Il candidato svolga quanti più possibile dei seguenti sei esercizi.

Esercizio 1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$$
nell'intervallo $I = [0, 1]$ e, per ogni $x \in I$, la successione $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ definita per ricorrenza nel modo seguente:
$$a_0(x) = x; \quad a_n(x) = f(a_{n-1}(x)).$$
(a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo I e calcolare $a_2(\frac{1}{2})$.

Sia ora k un numero intero maggiore o uguale a 0 e poniamo
$$\mathbb{Q}_k = \left\{x = \frac{p}{2^k} : p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 2^k\right\}.$$
(b) Dimostrare che per ogni $x \in I$ e per ogni $k \geq 1$ vale
$$x \in \mathbb{Q}_k \text{ se e solo se } f(x) \in \mathbb{Q}_{k-1}.$$
(c) Dimostrare che per ogni $x \in I$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $a_m(x) = 0$ se e solo se $x \in \mathbb{Q}_k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

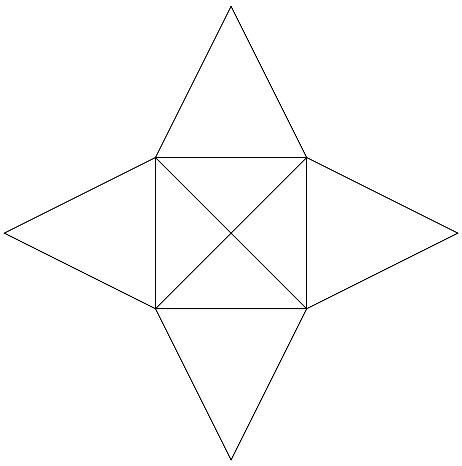
Traccia della risoluzione.
(a) Il grafico di f in I è in figura e $a_2(\frac{1}{2}) = f(a_1(\frac{1}{2})) = f(1) = 0$. Osserviamo inoltre che $f(I) = I$.



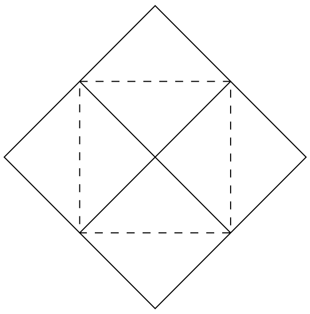
(b) Per simmetria possiamo supporre $x \geq \frac{1}{2}$. Se $x = p/2^k$, allora $f(x) = \frac{2^k - p}{2^{k-1}}$. Sia ora $f(x) = p/2^{k-1}$, con $x \geq \frac{1}{2}$. Un calcolo analogo dà $x = \frac{2^k - p}{2^k}$.
(c) La necessità segue da (b): se $a_k(x) = 0 \in \mathbb{Q}_0$, allora $a_{k-1}(x) \in \mathbb{Q}_1$ e così via. Per la sufficienza, osserviamo che se $x \in \mathbb{Q}_k$ allora $a_k(x) \in \mathbb{Q}_0 = \{0, 1\}$. Se $a_k(x) = 0$, la dimostrazione è finita. Se $a_k(x) = 1$, allora $a_{k+1}(x) = 0$.

Esercizio 2. Si considerino un cubo di lato l e sei piramidi rette di altezza h e base quadrata di lato l. Sia P il poliedro che si ottiene appoggiando le 6 piramidi sulle facce del cubo di modo che ciascuna faccia del cubo sia sovrapposta con la base di una piramide.
(a) Discutere al variare di h e l del numero di facce del poliedro P.
Consideriamo ora per i quesiti seguenti il caso in cui h assuma il valore che minimizza il numero di facce di P.
(b) Calcolare la superficie ed il volume del poliedro P (in funzione di l.)
(c) Quanti spigoli ha P?
(d) Qual è la forma delle facce di P?

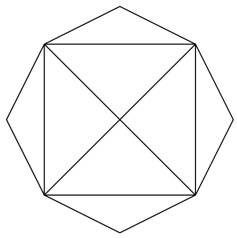
Traccia della risoluzione.
(a) Il poliedro P è ottenuto dall'unione del cubo con le sei piramidi. Le facce del cubo e le basi delle piramidi dopo l'unione diventano interne al poliedro, quindi la superficie di P è costituita dalle facce laterali delle piramidi.



$h > \frac{l}{2}$



$h = \frac{l}{2}$



$h < \frac{l}{2}$

Come si vede dalla figura per $h > \frac{l}{2}$ e $h < \frac{l}{2}$ le facce del poliedro P coincidono con le facce laterali delle piramidi e sono 24. Nel caso speciale $h = \frac{l}{2}$ invece le facce adiacenti di piramidi adiacenti sono complanari e formano così un'unica faccia di forma romboidale con le diagonali di lunghezza l e $\sqrt{2}l$. Quindi per $h = \frac{l}{2}$ il poliedro ha 12 facce.

(b) La superficie del poliedro è costituita da 12 rombi con le diagonali di lunghezza l e $\sqrt{2}l$, da cui si ottiene una misura totale della superficie di $6\sqrt{2}l^2$. Il volume di P invece è $2l^3$ e si ottiene sommando i volumi del cubo e delle piramidi.

(c) Nel caso $h = \frac{l}{2}$ la superficie è composta da 12 rombi, ciascun rombo ha 4 spigoli e ciascuno spigolo appartiene esattamente a due rombi per cui il numero totale degli spigoli è $12 \cdot 4/2 = 24$.

(d) Come visto nel punto (a) le facce hanno la forma di rombi con le diagonali di lunghezza l e $\sqrt{2}l$.

Esercizio 3. Siano m, n numeri interi maggiori o uguali a 1, fissati. Si determinino il massimo ed il minimo di

$$|A + B|$$

al variare di A e B tra tutti gli insiemi di numeri interi tali che $|A| = m$ e $|B| = n$, dove

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

(*Nota: se S è un insieme finito, con $|S|$ si indica il numero di elementi di S.*)

Traccia della risoluzione.

Il minimo è $m + n - 1$. Per mostrare che è raggiunto, fissiamo i numeri interi x e y e poniamo

$$A = \{x, x + 1, \ldots, x + m - 2, x + m - 1\}, \quad B = \{y, y + 1, \ldots, y + n - 2, y + n - 1\}.$$

Allora

$$A + B = \{x + y, x + y + 1, \ldots, x + y + m + n - 3, x + y + m + n - 2\}.$$

Gli elementi sono tutti distinti e sono $m + n - 1$.

In generale, se $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ (si intende che gli elementi sono elencati in ordine crescente) allora gli $m + n - 1$ elementi di $A + B$ dati da

$$x_1 + y_1, x_1 + y_2, \ldots, x_1 + y_n;\ y_n + x_2, y_n + x_3, \ldots, y_n + x_m$$

sono tutti distinti. Chiaramente $A + B$ ne può contenere altri, per cui $m + n - 1$ è il minimo.

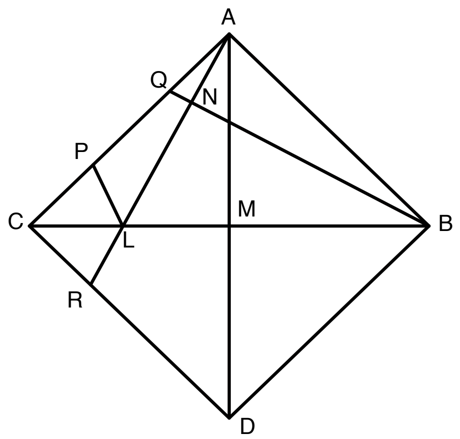
Il massimo è mn, numero massimo delle addizioni che si possono effettuare tra elementi di A ed elementi di B. Tale massimo è raggiunto, ad esempio, ponendo

$$A = \{1, 2, \ldots, m - 1, m\}, \quad B = \{0, m, 2m, \ldots, (n - 1)m\}.$$

Infatti,

$$A + B = \{1, 2, \ldots, m; m + 1, \ldots, 2m; 2m + 1, \ldots, (n - 1)m; (n - 1)m + 1, \ldots, nm\}.$$

Esercizio 4. Si consideri un quadrato $ABCD$. Si considerino sul lato AC due punti P e Q disposti come in figura e tali che le lunghezze di AQ e PC siano uguali. Si consideri il segmento AR, perpendicolare al segmento BQ, che interseca BQ in N e BC in L come in figura. Sia M l'intersezione delle diagonali del quadrato. Dimostrare che:
(a) gli angoli $N\widehat{L}B$ e $P\widehat{L}C$ sono congruenti;
(b) l'ampiezza dell'angolo $M\widehat{N}L$ è $\frac{\pi}{4}$.



Traccia della risoluzione.
I triangoli ARC e NAQ sono simili, essendo entrambi triangoli rettangoli e con l'angolo in A in comune. In particolare l'angolo $A\widehat{Q}B$ è uguale a $C\widehat{R}A$.

Si deduce da questo che i triangoli ARC e BAQ sono congruenti, essendo triangoli rettangoli con tutti gli angoli uguali e i cateti corrispondenti AB e AC di uguale lunghezza. In particolare la lunghezza di AQ è uguale a quella di CR.

Ma per ipotesi la lunghezza di AQ è anche uguale a quella di PC, dunque CR e PC hanno la stessa lunghezza.

Dunque i triangoli PCL e RCL sono congruenti, avendo uguali due lati e l'angolo (ampio $\frac{\pi}{2}$) fra essi compreso.

Allora l'angolo $P\widehat{L}C$ ha la stessa ampiezza di $C\widehat{L}R$ che a sua volta, in quanto opposto al vertice, ha la stessa ampiezza di $N\widehat{L}B$ (questa era la prima richiesta del problema). Siccome $M\widehat{L}A$ e $R\widehat{L}C$ sono opposti al vertice, segue la tesi.

Ora i triangoli AML e BNL sono simili, essendo rettangoli e avendo l'angolo in L in comune. Dunque (indicando per brevità le lunghezze dei segmenti allo stesso modo dei segmenti)

$$ML/NL = AL/BL$$

Questa uguaglianza di rapporti mostra anche che i triangoli MNL e BAL sono simili, avendo l'angolo in L in comune e i lati relativi a tale angolo che rispettano la stessa proporzione.

Dunque l'angolo $M\widehat{N}L$ è congruente all'angolo $A\widehat{B}L$ e dunque è ampio $\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 5. Sia n un intero positivo pari, e si consideri un poligono regolare P_n con n lati e con i vertici numerati in senso orario da 1 a n. Sia k un intero positivo minore o uguale a n. Dato un insieme di k vertici X chiamiamo X^{opp} l'insieme costituito dai vertici che sono opposti ai vertici in X rispetto al centro di P_n (per esempio, se $n = 6$, $k = 3$, e $X = \{1, 2, 3\}$, allora $X^{opp} = \{4, 5, 6\}$, e se invece $X = \{1, 2, 4\}$, allora $X^{opp} = \{1, 5, 4\}$).

i) Calcolare, per ogni n e k come sopra, il numero a_n^k degli insiemi X costituiti da k vertici e tali che $X = X^{opp}$.

ii) Si consideri ora per ogni intero positivo m il polinomio $g_m(x) = x^{m-1} + \cdots + x + 1$ (per cui per esempio $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x + 1$ etc...). Dimostrare che per ogni n e k come sopra vale

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_n(x)\, g_{n-1}(x) \cdots g_{n-k+1}(x)}{g_k(x)\, g_{k-1}(x) \cdots g_1(x)} = a_n^k.$$

Traccia della risoluzione.

i) Per prima cosa osserviamo che se k è dispari allora $a_n^k = 0$. Infatti se il vertice a appartiene ad un insieme X lasciato fisso da F allora anche il vertice opposto ad a deve appartenere a X, dunque X deve avere cardinalità pari.

Invece se k è pari, per determinare un insieme X lasciato fisso da F basta scegliere $\frac{k}{2}$ vertici fra i vertici $\{1, 2, ..., \frac{n}{2}\}$, poi X dovrà contenere anche i loro opposti. Dunque se k è pari

$$a_n^k = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}}$$

ii) Osserviamo che, dati due numeri interi positivi p, q, se sono entrambi pari vale

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_p(x)}{g_q(x)} = \frac{p}{q} \tag{1}$$

mentre se sono entrambi dispari vale

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_p(x)}{g_q(x)} = 1 \tag{2}$$

Infatti l'ultima uguaglianza segue subito dal fatto che se p, q sono entrambi dispari vale $g_p(-1) = g_q(-1) = 1$, mentre la prima segue dal fatto che se p, q sono entrambi pari possiamo scrivere

$$g_p(x) = (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{p-2})$$
$$g_q(x) = (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{q-2})$$

e dunque

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_p(x)}{g_q(x)} = \lim_{x\to-1} \frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{p-2}}{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{q-2}} = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{q}{2}} = \frac{p}{q}$$

Ora il limite che si deve calcolare è

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_n(x) \cdot g_{n-1}(x) \cdots g_{n-k+1}(x)}{g_k(x) \cdot g_{k-1}(x) \cdots g_1(x)}$$

Se k è dispari, osserviamo che

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_{n-t}(x)}{g_{k-t+1}(x)}$$

è finito e diverso da 0 per ogni $t = 1, ..., k - 1$ per le relazioni (1) e (2), mentre

$$\lim_{x\to-1} \frac{g_n(x)}{g_1(x)} = \frac{g_n(-1)}{g_1(-1)} = 0$$

dunque
$$\lim_{x\to -1} \frac{g_n(x)\cdot g_{n-1}(x)\cdots g_{n-k+1}(x)}{g_k(x)\cdot g_{k-1}(x)\cdots g_1(x)} = 0$$
come dovevamo dimostrare.

Se invece k è pari le relazioni (1) e (2) ci permettono di calcolare il limite
$$\lim_{x\to -1} \frac{g_n(x)\cdot g_{n-1}(x)\cdots g_{n-k+1}(x)}{g_k(x)\cdot g_{k-1}(x)\cdots g_1(x)}$$
spezzandolo nel prodotto dei limiti
$$\lim_{x\to -1} \frac{g_{n-s}(x)}{g_{k-s}(x)}$$
ottenendo
$$\lim_{x\to -1} \frac{g_n(x)\cdot g_{n-1}(x)\cdots g_{n-k+1}(x)}{g_k(x)\cdot g_{k-1}(x)\cdots g_1(x)} = \frac{n}{k}\cdot 1\cdot \frac{n-2}{k-2}\cdot 1\cdot \frac{n-4}{k-4}\cdots =$$
$$= \frac{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}}\cdot \frac{\frac{n-2}{2}}{\frac{k-2}{2}}\cdot \frac{\frac{n-4}{2}}{\frac{k-4}{2}}\cdots = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}} = a_n^k$$

Esercizio 6. Siano a, b, c, d numeri reali maggiori di zero. Si dimostri la disuguaglianza

$$a + b + c + d \leq \frac{a^4}{bcd} + \frac{b^4}{acd} + \frac{c^4}{abd} + \frac{d^4}{abc}.$$

Traccia della risoluzione.

Moltiplicando ambo i membri per $abcd$, la disuguaglianza da dimostrare diventa

$$a^2bcd + ab^2cd + abc^2d + abcd^2 \leq a^5 + b^5 + c^5 + d^5.$$

Maggioriamo ciascun addendo del primo membro allo stesso modo. Per il primo termine si ha

$$\begin{aligned} a^2bcd &= \left(a^5a^5b^5c^5d^5\right)^{1/5} \\ &\quad \text{(per la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica)} \\ &\leq \frac{2}{5}a^5 + \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{5}c^5 + \frac{1}{5}d^5. \end{aligned}$$

Ragionando in modo analogo con gli altri tre termini si ottengono altre tre disuguaglianze. Sommando le quattro disuguaglianze si arriva alla tesi.