AMMISSIONE ALLA CLASSE DI SCIENZE SOCIALI DELLA SCUOLA GALILEIANA
Prova di Matematica

Padova, 6-9-2016

1. Problema

Sia n un numero intero strettamente positivo.

(1) Si dimostri la disuguaglianza

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\},$$

dove $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ sono numeri reali strettamente positivi.

(2) Si applichi poi la disuguaglianza precedente per dimostrare che se $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$ $(z \in \mathbb{R})$ è un polinomio a coefficienti positivi e $0 < x \leq y$, $x, y \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{x^n}{y^n} \leq \frac{P(x)}{P(y)} \leq 1.$$

Osservazione: Nella disuguaglianza precedente $\min\{d_1, d_2 \cdots, d_n\}$ e $\max\{d_1, d_2 \cdots, d_n\}$ denotano rispettivamente il più piccolo e il più grande numero nell'insieme $\{d_1, d_2 \cdots, d_n\}$.

---

2. Problema

Siano k e N due interi strettamente positivi e siano E_N e F_N gli insiemi definiti da

$$E_N = \{2 + rk : r \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, N-1\}\}$$

e

$$F_N = \{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots 2^{N-1}\}.$$

Si determinino $|E_N + E_N|$ e $|F_N + F_N|$.

Osservazione: Se A è un sottoinsieme finito dell'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, denotiamo con $|A|$ il numero dei suoi elementi. Dati due sottoinsiemi finiti B e C di $\mathbb{Z}$ definiamo

$$B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\}.$$

---

3. Problema

Si considerino 4 numeri reali non non negativi x, y, z, w e si dimostri che la disuguaglianza

$$xyzw \geq 1$$

implica che

$$16 \leq (1+x)(1+y)(1+z)(1+w)\,.$$

Si considerino poi n ($n \in \mathbb{N}$) numeri reali non negativi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e si determini il più piccolo numero $a > 1$ tale che la disuguaglianza

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq 1$$

implichi la disuguaglianza

$$a^n \leq (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\,.$$

---

4. Problema

Dati un sottoinsieme finito e non vuoto A di $\mathbb{Z}$ e un numero intero positivo n, si denoti con nA l'insieme definito da

$$nA = \{x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n : a_1, a_2, \cdots, a_n \in A\}.$$

Si dimostri che

$$|nA| \leq \binom{|A|+n-1}{n} = \frac{(|A|+n-1)(|A|+n-2)\cdots(|A|+1)|A|}{n!}.$$

<u>Osservazione 1</u>: Se E è un sottoinsieme finito e non vuoto dell'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ si denota con $|E|$ il numero dei suoi elementi.

<u>Osservazione 2</u>: Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Ricordiamo che:

- $n!$ denota il prodotto dei primi n numeri interi positivi,
- il coefficiente binomiale $\binom{n}{m}$ è definito da

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

- vale la regola di Pascal-Tartaglia

$$1 + m + \binom{m+1}{2} + \binom{m+2}{3} + \cdots + \binom{m+n-2}{n-1} + \binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n}{n}.$$