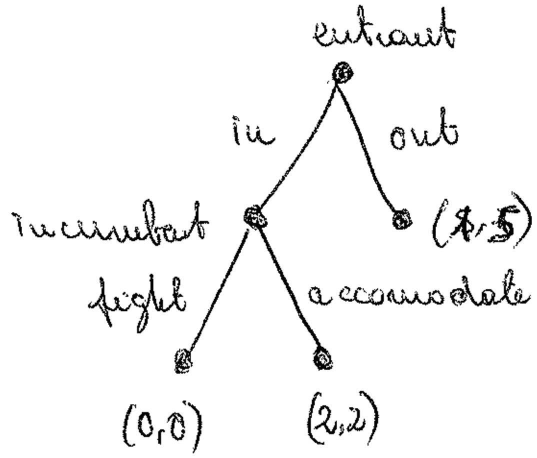
1

Slide 4

- forma estesa del gioco di entrata

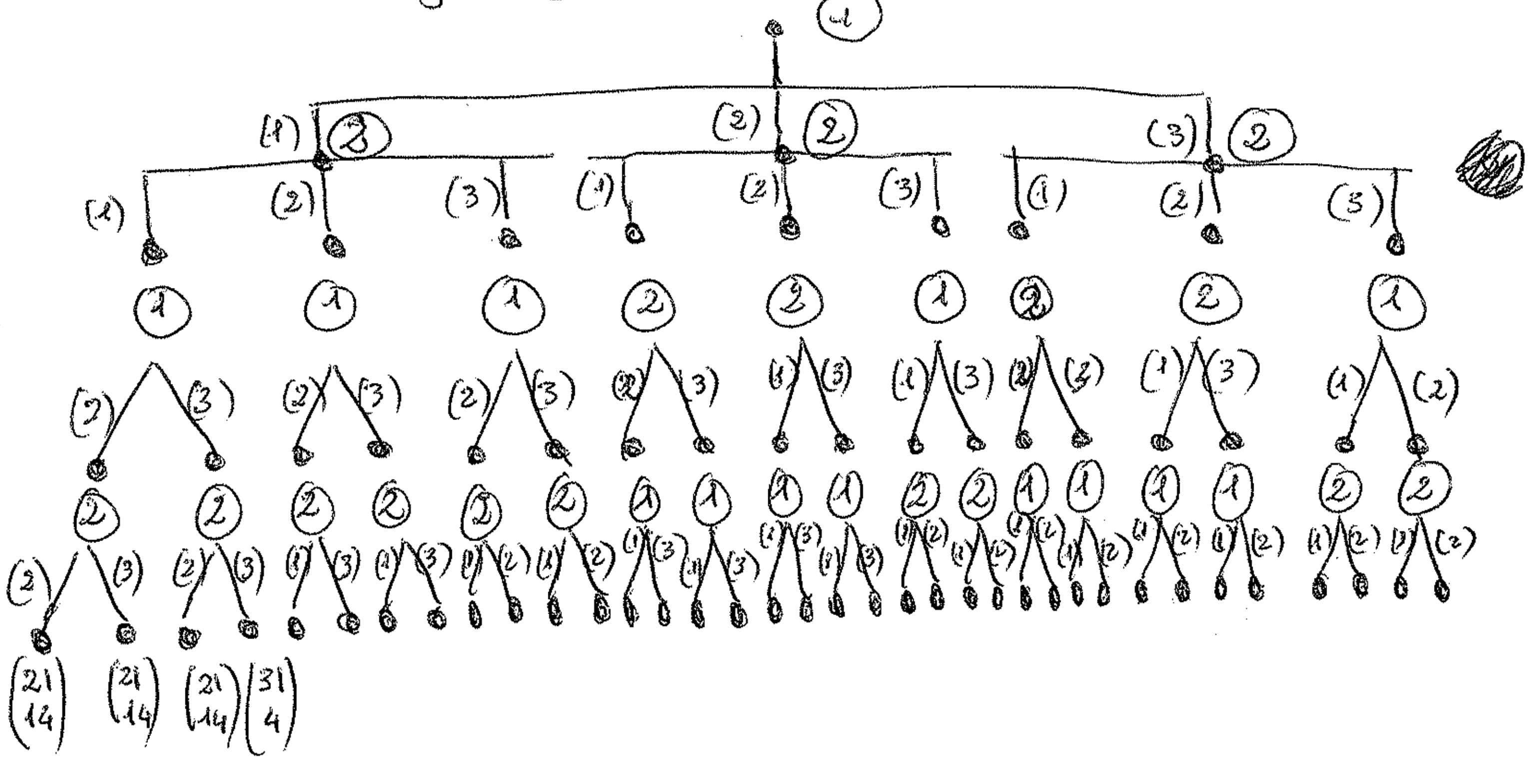


- forma estesa ultima mano a briscola

player 1 : asso di briscola (denari) (1)
7 spade (2)
~~ass~~ tre di coppe (3)

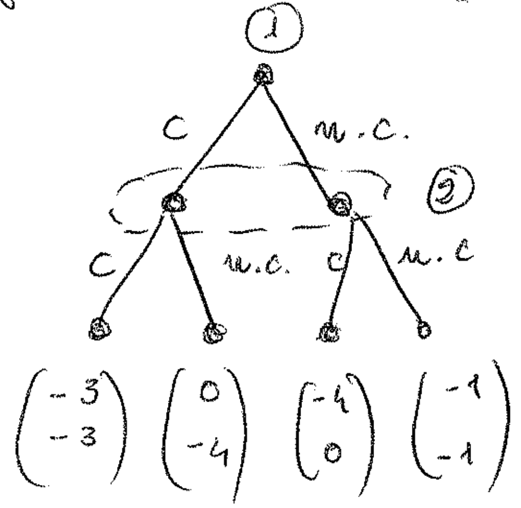
player 2 tre di briscola (denari) (1)
re di briscola (denari) (2)
5 di spade (3)

parte player 1



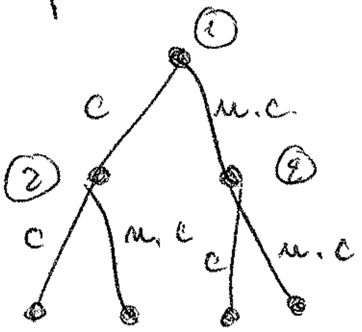
Slide 4

- forma estesa dilemma del prigioniero



Slide 6

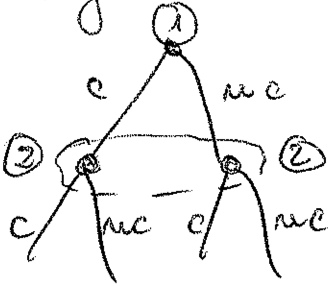
- Strategie dilemma del prigioniero sequenziale



$S_1 = \{ c., n.c. \}$

$S_2 = \{ c.c., c.n.c., n.c.c., nc,nc \}$

- Strategie dilemma del prigioniero simultaneo



$S_1 = \{ c., n.c. \}$

$S_2 = \{ c., n.c. \}$

Slide 8

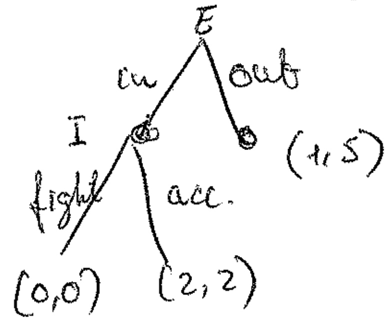
4

- Forma normale del dilemma del prigioniero sequenziale

1 \ 2	c.c	c. nc	nc c	nc nc
c	-3,-3	-3,-3	0,-4	0,-4
n.c.	-4,0	-1,-1	-4,0	-1,-1

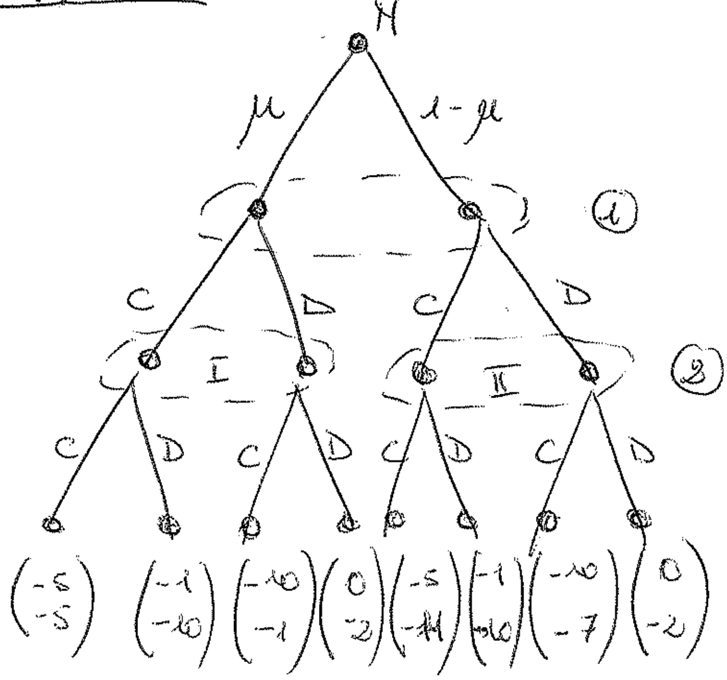
Slide 9

- forma normale e eq. di Nash dell'entry game



E \ I	fight	accom.
in	0, 0	2, 2
out	1, 5	1, 5

Esempio 1



1 non osserva il tipo di 2

quindi non sa se sta giocando con 2I o con 2II

Se gioca con 2I

1 \ 2I	C	D
C	-5, -5	-1, -10
D	-10, -1	0, -2

Se gioca con 2II

1 \ 2II	C	D
C	-5, -11	-1, -10
D	-10, -7	0, -2

2I ha D dominata
2II ha C dominata $\longrightarrow$ $S_2(\mathrm{I}) = C$, $S_2(\mathrm{II}) = D$

Sapendo questo, il giocatore 1

$$\max_{s_1 \in [C,D)} E_{\theta_2}\, u_1\big(s_1, s_2(\theta_2)\big) = \mu\, u(s_1, C) + (1-\mu)\, u(s_1, D)$$

$$C: \quad \mu(-5) + (1-\mu)(-1) \rightarrow -1 - 4\mu$$

$$D: \quad \mu(-10) + (1-\mu)\,0 \longrightarrow -10\mu$$

$$-1-4\mu > -10\mu \iff 1+4\mu < 10\mu \rightarrow \mu > \frac{1}{6}$$

2

- Se $\mu > \frac{1}{6} \rightarrow BNE = (C, (CD))$
- Se $\mu < \frac{1}{6} \rightarrow BNE = (D, (CD))$
- Se $\mu = \frac{1}{6} \rightarrow BNE = (C, (CD)) \vee (D, (CD))$

Esempio 2

2I

	M	T
M	3, 1	0, 0
T	0, 0	1, 3

(μ)

2II

	M	T
M	$\frac{1}{2}$, 1	0, 3
T	3, 1	$-\frac{5}{2}$, 0

($1-\mu$)

~~Se 1 pensa di giocare con 2I~~

- Supponiamo 1 giochi M.

Allora la best response di 2 è

$$S_2(I) = M$$
$$S_2(II) = T$$

Dato (MT), la best response di 1 è

$$M: \mu(3) + (1-\mu)0 = 3\mu$$
$$T: \mu(0) + (1-\mu)\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mu$$

$$3\mu > -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mu \text{ per ogni } \mu.$$

Quindi M è risposta ottima a MT

$$\Rightarrow BNE = (M, MT)$$

- Supponiamo 1 giochi T

Allora la best response di 2 è

$$S_2(I) = T$$
$$S_2(II) = M$$

Se ② gioca TM la best response di ① è:

$$H: \mu(0) + (1-\mu)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$T: \mu(1) + (1-\mu)(3)$$

Per ogni μ, T è risposta ottima

$\Longrightarrow$ BNE $= (T, TM)$

3) Gioco di Cournot

domanda $P = 2 - q_1 - q_2$

$c_1 = 1$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{5}{4} & (1/2) \quad H \text{ type} \\ c_2 = 3/4 & (1/2) \quad L \text{ type} \end{cases}$$

Ci sono "tre" giocatori

$$\pi_1 = (2 - q_1 - \tilde{q}_2)q_1 - q_1$$
$$\pi_{2H} = (2 - q_1 - q_{2H})q_{2H} - \frac{5}{4}q_{2H}$$
$$\pi_{2L} = (2 - q_1 - q_{2L})q_{2L} - 3/4\, q_{2L}$$

$$E\pi_1 = \frac{1}{2}\left[(2 - q_1 - q_{2H})q_1 - q_1\right] + \frac{1}{2}\left[(2 - q_1 - q_{2L})q_1 - q_1\right]$$
$$\overset{!}{=} (2 - q_1)q_1 - q_1 - \frac{1}{2}q_1(q_{2H} + q_{2L})$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 2 - 2q_1 - 1 - \frac{1}{2}(q_{2H} + q_{2L}) = 0$$

$$q_1^* = \frac{1 - 1/2(q_{2H} + q_{2L})}{2}$$

4

$$\frac{\partial \pi_{2H}}{\partial q_{2H}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^*_{2H} = \frac{3/4 - q_1}{2}$$

$$\frac{\partial \pi_{2L}}{\partial q_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^*_{2L} = \frac{5/4 - q_1}{2}$$

Trovo le best response di ogni giocatore
voglio che le best responses valgano simultaneamente

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1 - \frac{1}{2}(q_{2H} + q_{2L})}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} Eq_2 \\ q^*_{2H} = \dfrac{3/4 - q_1}{2} \\ q^*_{2L} = \dfrac{5/4 - q_1}{2} \end{cases}$$

$$Eq_2 = \frac{2 - 2q_1}{4} = \frac{1 - q_1}{2}$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \, \dfrac{1 - q_1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} q_1 \longrightarrow q_1^* = 1/3 \\ q_{2H} = 5/24 \\ q_{2L} = 11/24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow BNE = \left(\frac{1}{3}; \left(\frac{5}{24}, \frac{11}{24} \right) \right)$$

George

		T	M
Jerry	T	~~2500~~, 500	0, 2000
	M	0, 2000	0, 2000

peach

q

		T	M
Jerry	T	500, 500	0, 0
	M	0, 0	0, 0

lemon

1 − q

Supponiamo Jerry gioca T allora

George risponde $S_G(\text{peach}) = M$, $S_G(\text{lemon}) = T$

Dato MT, ~~George~~ risponde

$T: \; q(0) + (1-q) \cdot 500$

$M: \; q(0) + (1-q) \cdot 0$

gioca T

$\Rightarrow \; BNE \; (T, (M,T))$

il prezzo è basso
ma si vendono solo
limoni

Se $p = 2100$

	T	M
T	900, 2100	0, 2000
M	0, 2000	0, 2000

	T	M
T	−1100, 2100	0, 0
M	0, 0	0, 0

Se Jerry gioca T, $\Rightarrow S_G(\text{peach}) = T$
$\Rightarrow S_G(\text{lemon}) = T$

Dato TT, Jerry risponde

$T: \; 900q + (-1100)(1-q)$

$M = 0$

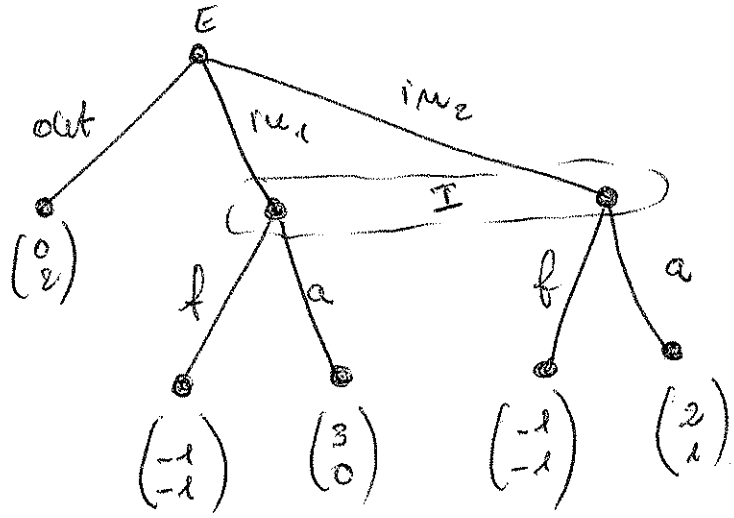
$T > M \iff -1100 + 2000q > 0$

$q > \frac{1100}{2000} = \frac{11}{20}$

Se $q > \frac{11}{20}$ allora (T, TT)

Se ci sono tanti limoni non c'è mercato

Esempio - Entry game



	fight	accom
out	0, 2	0, 2
in_1	-1, -1	3, 0
in_2	-1, -1	2, 1

Introducendo le beliefs: $\mu(in_1)$

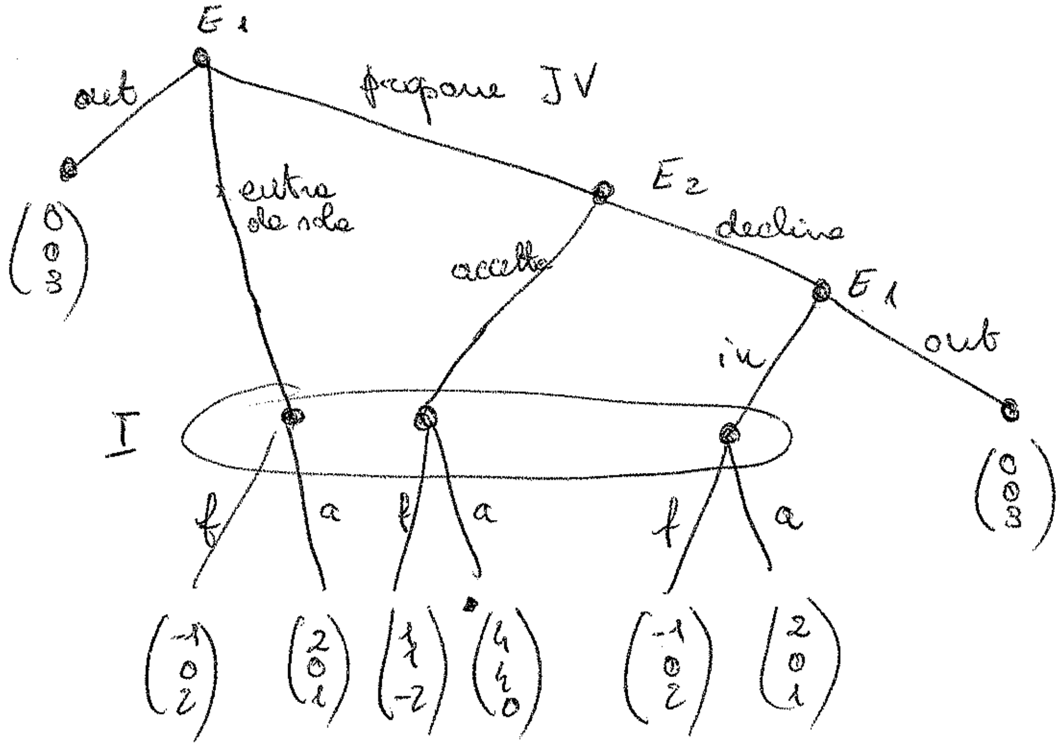
$f: (-1)\mu + (-1)(1-\mu)$

$a: (0)\mu + (1)(1-\mu)$

per ogni μ è meglio accom

Sapendo questo E gioca in_1

Esempio - Joint Venture tra due imprese entrambi



Qualsiasi cosa faccia I, E_2 accetta.
Sapendo questo E_1 fa la proposta, indipendentemente da ciò che fa I.

Quindi I deve aspettarsi che μ(nodo centrale) = 1
Quindi la cosa migliore da fare è giocare "accom."

Ma allora E_1 dopo una rejection (out of eq.) della proposta di joint venture deve giocare "in"

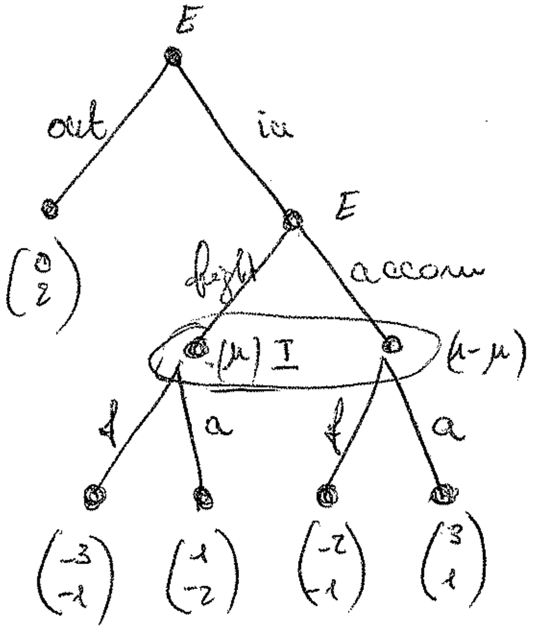
Quindi weak PBE è

$$\left[(\text{Proponi, in}), (\text{accetta}), (\text{accom.})\right]$$

con beliefs $\mu_I(\text{sinistra}) = \mu_I(\text{destra}) = 0$
$\mu_I(\text{centrale}) = 1$

Nota Sia $\mu_I(\text{sinistra}) = 1$. Date queste beliefs I gioca fight. Tuttavia E_2 accetta sempre e E_1 propone sempre

Esempio - Entry game modificato



L'equilibrio perfetto nei sottogiochi è

$$\Big[\underbrace{(in, accom)}_{E},\ \underbrace{accom}_{I}\Big]$$

		I: a	I: f
E	a	3, 1	-2, -1
	f	1, -2	-3, -1

L'equilibrio PBE invece può essere

I gioca fight se $-1 > -2\mu + 1(1-\mu) \Rightarrow \mu \geq \frac{2}{3}$

In tal caso E gioca "accom" nel secondo infoset e "out" nel primo.

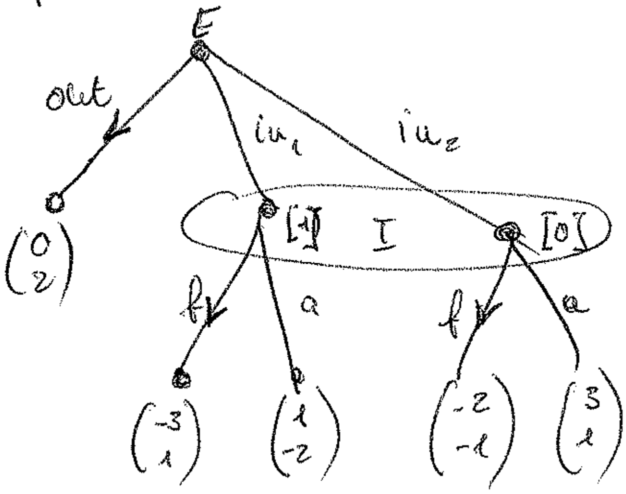
Quindi l'info set di I non è raggiunto e $\mu > \frac{2}{3}$ è consistente

il ~~weak~~ PBE risulta: $\Big[\underbrace{(out, accom)}_{E},\ \underbrace{fight}_{I}\Big]$ con $\mu > \frac{2}{3}$

Nota: questi strategie non generano un weak PBE nel sottogioco proprio (μ dovrebbe essere 0)

9

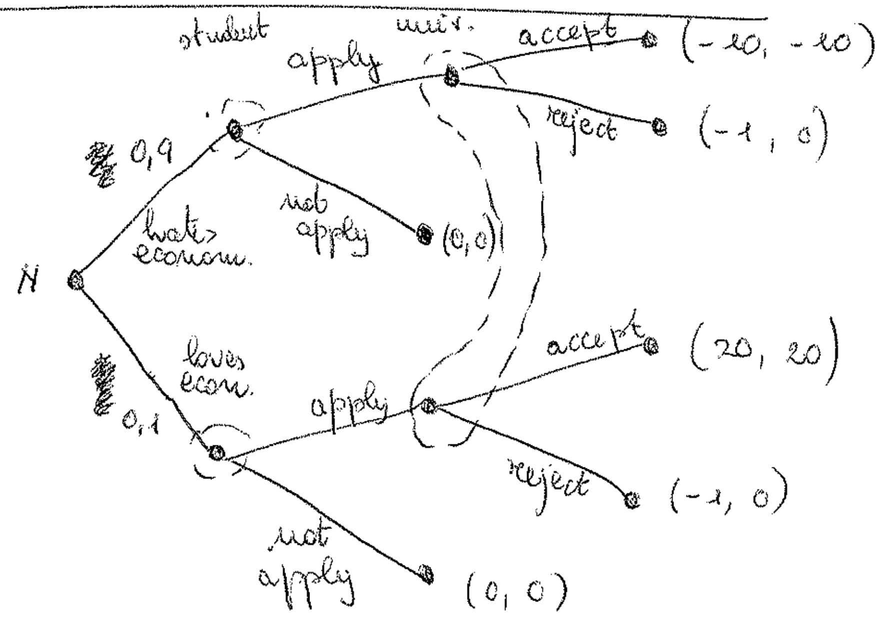
Esempio - Forward Induction



in questo gioco se $\mu = 1$ allora $f \succ a$ per I. Quindi E preferisce out.

Ma se $\underline{I}$ dice: E ha giocato entry per poi giocare in_2 che domina in_1, allora $\mu = 0$

The Ph.D. Admissions Game



90% of students hate economics. Admitting a hater to the PhD is bad for both the university and the student.
Admitting a lover is good for both.
Rejection costs -1 to the student because of the troubles he pass through to apply

This is a signalling game.
Let's define Universities belief μ (hater | apply)

accept : $(-10)\mu + 20(1-\mu)$
reject : 0

accept ≻ reject if $\mu < \frac{2}{3}$

- Suppose $\mu < \frac{2}{3}$. Then student plays (not apply, apply) [hater, lover]
Therefore in equilibrium $\mu = 0$
$$PBE = \left[(NA, A), \text{Accept} \right] \quad \mu = 0$$

- Suppose $\mu > \frac{2}{3}$. Then student plays (not apply, not apply)
Then beliefs can be arbitrary set
$$PBE = \left[(NA, NA), \text{Reject} \right] \quad \mu \geq \frac{2}{3}$$

Can we refine the Pooling equilibria?
We can imagine three criteria to restrict off-the-eq. beliefs.
i) Passive conjecture: errors are random, therefore ex-post beliefs must coincide with ex-ante beliefs. $\rightarrow \mu = 0,9$
This supports the pooling eq.

2) Intuitive Criterion (or equilibrium dominance):

Types of the informed player which would be hurt by the out-of-equilibrium action no matter what beliefs where held by the un-informed player, must be assigned zero probability.

In this case the hater's deviation would be "apply" which pays always less than "not apply". Then $\mu(\text{hater}) = 0$

$\Rightarrow$ the pooling eq. collapses

3) Complete Robustness.

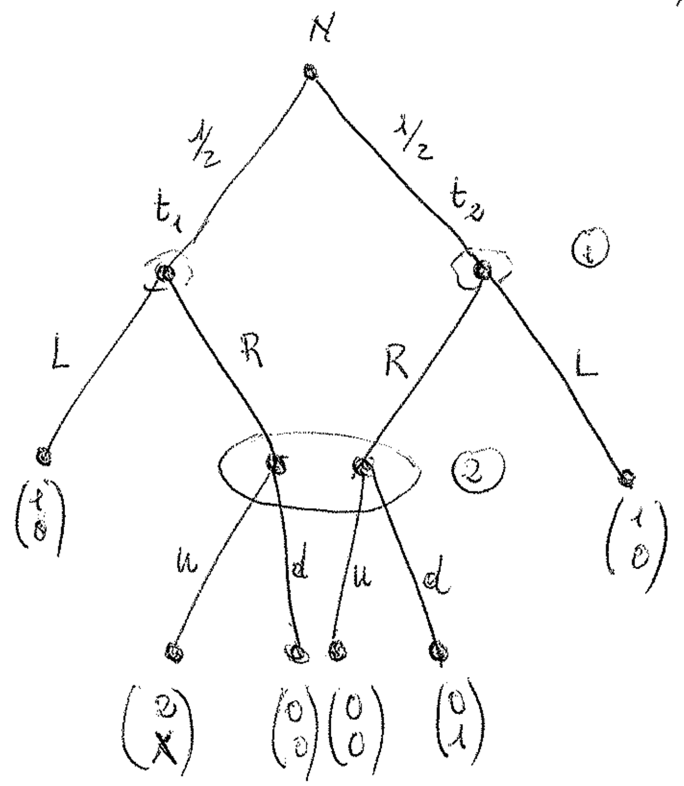
Equilibrium strategies must be best responses ~~for~~ given any out-of-eq. beliefs (i.e. whatever μ, (s_1, s_2) must be best responses)

This refinement rules out pooling eq. because out-of-eq. strategies can only be $\mu \geq \frac{2}{3}$

4) ~~[illegible]~~

Exercise on Signalling games

Find all PBE when $x > 0$



In signalling games we can start finding equilibria by distinguishing between separating and pooling eq. 3

- Separating:

- $\left[\left(R|_{t_1}\ L|_{t_2}\right), \ldots\right]$ This implies $\mu(t_1) = 1$ then ② plays "u"

  t_1 then optimally plays R
  t_2 optimally plays L

  Therefore $[(RL), u]$ $\mu(t_1) = 1$ is a PBE

- $\left[\left(L|_{t_1}, R|_{t_2}\right), \ldots\right]$ this implies $\mu(t_1) = 0$ then ② plays "d"

  t_1 plays L
  t_2 plays L

  This is <u>not</u> a PBE

- Pooling
- $\left[\left(R|_{t_1}, R|_{t_2}\right), \ldots\right]$ $\mu(t_1) = \frac{1}{2}$

$$u: \quad x\left(\tfrac{1}{2}\right) + 0\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}x$$

$$d: \quad 0\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

If $x > 1$ then $u \succ d$

given u, t_1 plays R
t_2 plays L

This is not a PBE

if $x < 1$ then $d \succ u$

given d, t_1 plays L
t_2 plays L

This is not a PBE

- $\left[\left(L|_{t_1}, L|_{t_2}\right), \dots\right]$

μ indeterminate

$$u: \ \mu x + (1-\mu) 0$$
$$d: \ \mu 0 + (1-\mu) \cdot 1$$

$$> \quad \mu x > (1-\mu)$$
$$\mu(1+x) > 1$$
$$\mu > \frac{1}{1+x} \iff u \succ d$$

if ② playes "u" then
t_1 playes R
t_2 playes L   This is <u>not</u> a PBE

if ② playes "d" then
t_1 playes L
t_2 playes L

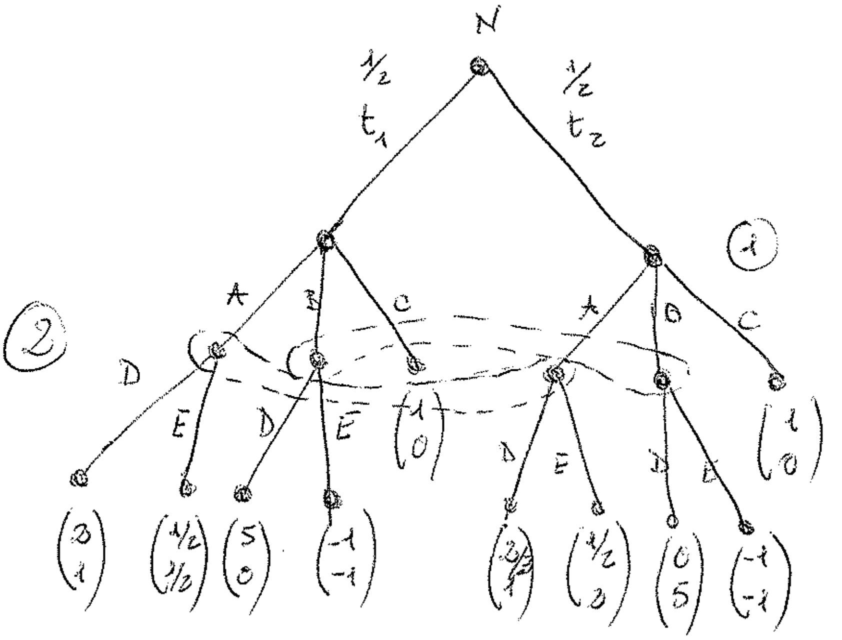
$\left[(LL), d\right]$ with $\mu(t_1) < \frac{1}{1+x}$ is a PBE

Tra gli equilibri pooling si puo' applicare il criterio intuitivo.

t_2 non ha incentivo a deviare qualsiasi siano le beliefs di ②. Quindi $1-\mu(t_1) = 0 \rightarrow \mu(t_1) = 1$

Tutti gli equilibri pooling possono essere raffinati.

Esempio: 2 tipi, 3 messaggi



Quando si osserva A: $\mu_A(t_1)$ per il giocatore 2

D: 1

E: $\mu_A(t_1)\frac{1}{2} + (1-\mu_A(t_1))2$

$$E \succ D \quad \text{se} \quad \mu_A(t_1) < \frac{2}{3}$$

Quando si osserva B: $\mu_B(t_1)$

D: $(1-\mu_B(t_1))5$

E: -1

$\forall \mu_B(t_1)$ $D \succ E$

Se $\mu_A(t_1) < \frac{2}{3}$, 2 gioca $\left(E|_A, D|_B\right)$

Il giocatore 1 allora gioca

Se t_1, gioca B

Se t_2, gioca C

Data la strategia di 1, $\mu_B(t_1) = 1$ (compatibile)

$\mu_A(t_1) < 2/3$

il PBE è $[BC, ED]$ con $\mu_B(t_1) = 1$ $\mu_A(t_1) < 2/3$

Questo equilibrio è robusto ai raffinamenti?
Nota che è un equilibrio separating.

1) Se si usano le passive conjectures $\mu_A(t_1) = 1/2$ e verificano $\mu_A < 2/3$

2) Se si usa complete robustness, l'equilibrio dipende dalle beliefs out of eq. Se $\mu_A(t_1) > 2/3$ cambia tutto.

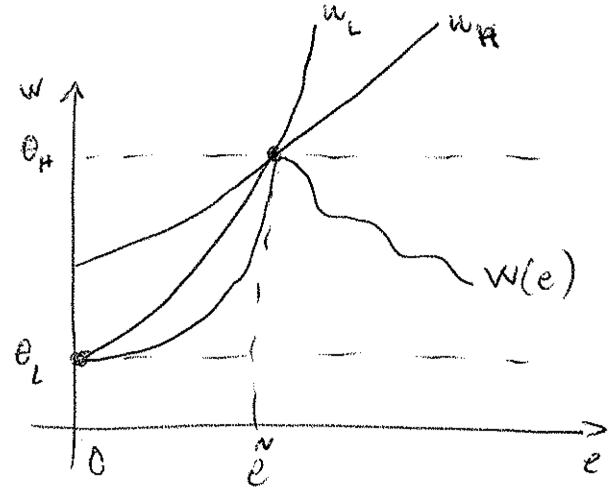
3) Se si usa il criterio intuitivo, t_1 non ha incentivo a deviare da B qualsiasi sia $\mu_A(t_1)$ $\rightarrow$ se si osserva A, la prob. che la deviazione venga da 1 è 0, cioè $\mu_A(t_1) = 0$. Questo è consistente con PBE

~~t_2 giocherebbe A se $\mu_A(t_2)$ fosse maggiore di $2/3$ cosa che indurrebbe 2 a giocare D~~

t_2 non ha incentivo a deviare verso A qualsiasi siano le beliefs di 2 quindi $\mu_A(t_2) = 0$. Incompatibile con PBE.

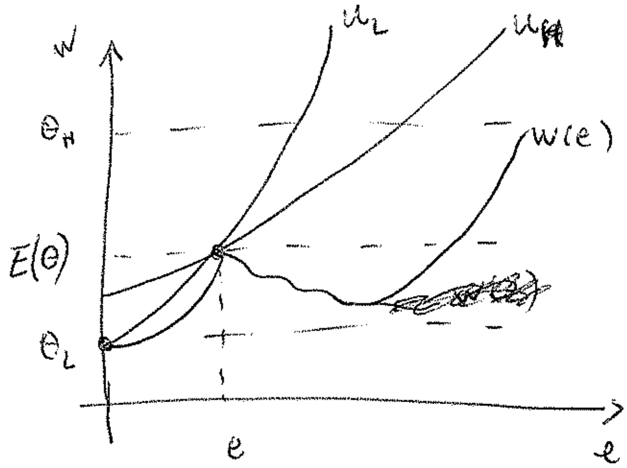
MODELLO SEGNALAZIONE di SPENCE (1973)

figura 1



separating

figura 2



pooling

figura 3

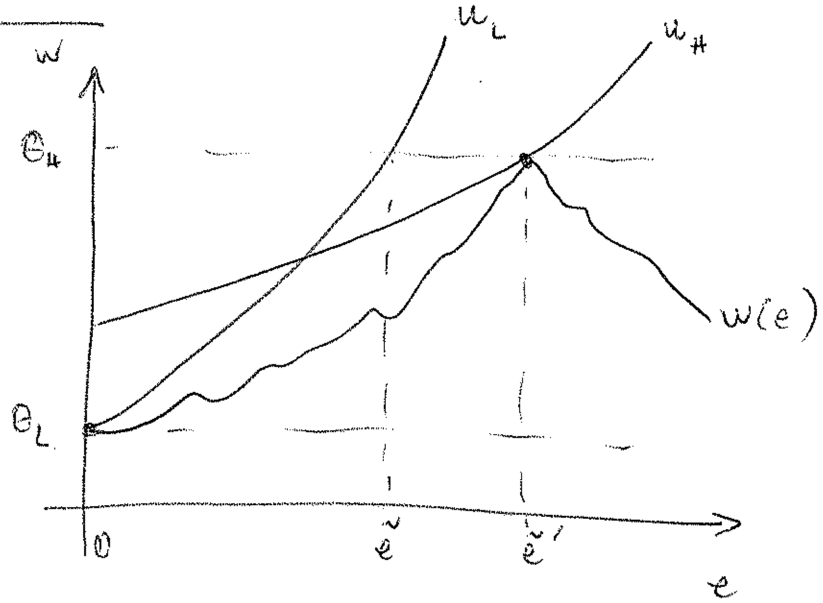


figure 4