

Introduzione alla Teoria dei Giochi

Nozioni Preliminari

Lorenzo Rocco

Scuola Galileiana - Università di Padova

25 marzo 2010

Dilemma del prigioniero

		prigioniero2	
		n.c.	c.
prigioniero1	n.c.	-1,-1	-4,0
	c.	0,-4	-3,-3

Corsa agli armamenti

		URSS	
		disarma	riarma
USA	disarma	2,2	0,3
	riarma	3,0	1,1

Bach o Stravinsky

		donna	
		Bach	Strav.
uomo	Bach	2,1	0,0
	Strav.	0,0	1,2

Fact

L'obiettivo della teoria dei giochi è quello di prevedere l'esito (o gli esiti) "ragionevoli" di un gioco.

La teoria dei giochi studia situazioni di interazione strategica tra *decisori razionali* con *conoscenza comune* delle regole e della struttura del gioco

Definition

Si parla di interazione strategica quando la "vincita" (payoff) del giocatore i dipende sia dalle sue scelte (strategie) che da quelle degli altri giocatori ($-i$).

- Economia:

- 1 competizione tra oligopolisti
- 2 competizione elettorale (ma anche scelta del manager)
- 3 negoziazione
- 4 aste
- 5 ...

- Biologia

- 1 Selezione naturale (giochi evolutivi)
Università di Vienna
- 2 Cooperazione e competizione tra i lieviti
Lieviti

- Filosofia
Filosofia

- Giochi

- 1 testa o croce (matching pennies)

- 2 morra cinese

- 3 scacchi

- 4 ...

	testa	croce
testa	-1,1	1,-1
croce	1,-1	-1,1

	forbice	sasso	carta
forbice	0,0	-1,1	1,-1
sasso	1,-1	0,0	-1,1
carta	-1,1	1,-1	0,0

Ogni giocatore i è caratterizzato da una funzione di payoff definita sul set A dei possibili esiti del gioco, che associa valori più alti a esiti per lui "preferibili".

Definition

Un individuo è razionale se punta a massimizzare il suo payoff

Definition

Common knowledge: la struttura del gioco, le regole, i giocatori, le loro funzioni di payoff e le strategie che possono adottare sono conosciute

- 1) da tutti i giocatori
- 2) tutti i giocatori sanno che i loro avversari le conoscono
- 3) tutti i giocatori sanno che i loro avversari sanno che loro conoscono
- 4)...

Definition

Un gioco in forma normale è composto dall'insieme dei giocatori, dallo spazio delle strategie disponibili per ogni giocatore e dalle funzioni di payoff di ogni giocatore: $\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$

Le tre "matrici" viste all'inizio sono rappresentazioni della forma normale di alcuni giochi.

- Il vettore delle strategie giocate dai giocatori si chiama *profilo strategico*
- Ad ogni *profilo strategico* corrisponde un *esito* del gioco. Es: (forbice, sasso) → vince Mr. 2
- Ad ogni esito corrisponde un payoff

$$u_i : S_1 \times \dots \times S_I \rightarrow \mathbb{R}$$

Il primo concetto di soluzione

Il primo e più debole concetto di soluzione di un gioco in forma normale è quello di *eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate*.

Definition

Una strategia $s_i \in S_i$ è strettamente dominata per il giocatore i nel gioco Γ_N se esiste una strategia $s'_i \in S_i$ tale che

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ per tutti } s_{-i} \in S_{-i}$$

Definition

Una strategia $s_i \in S_i$ è debolmente dominata per il giocatore i nel gioco Γ_N se esiste una strategia $s'_i \in S_i$ tale che

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ per tutti } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Strategie dominate II

- Strategie strettamente dominate possono essere eliminate sulla base del principio di razionalità
- Dopo avere eliminato alcune strategie strettamente dominate, altre strategie strettamente dominate possono emergere e possono essere ulteriormente eliminate

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>U</i>	4, 3	3, 5	2, 4
<i>M</i>	9, 4	2, 5	3, 4
<i>D</i>	5, 3	0, 2	2, 3

- L'eliminazione *iterata* su basa sulla common knowledge della razionalità: ogni iterazione richiede che tale CK sia più profonda. Se *i* sa che gli altri giocatori sono razionali, allora *i* può prevedere che i suoi rivali cancelleranno le loro strategie dominate che emergono dopo la sua eliminazione
Ma solo se gli altri sanno che *i* è razionale, si può prevedere che essi cancelleranno le strategie dominate che emergono.

Strategie dominate III

- Quanto i giocatori "credono" nella razionalità altrui? E se gli avversari sbagliassero con una piccola probabilità?

	A	B
a	1000, 0	1, 1
b	-1000, 0	2, 1

- Spesso non esistono strategie dominate \rightarrow nessun esito può essere escluso usando questo concetto (es. Bach vs Stavinsky)
- La soluzione del dilemma del prigioniero si ottiene per eliminazione delle strategie dominate

- Vi convince la soluzione prevista per il dilemma del prigioniero?

- Vi convince la soluzione prevista per il dilemma del prigioniero?
- Voi come giochereste?

- Vi convince la soluzione prevista per il dilemma del prigioniero?
- Voi come giochereste?
- Sperimentalmente: il 40% gioca "non confessare"

Il secondo concetto di soluzione

Il secondo concetto di soluzione di un gioco in forma normale è quello di *eliminazione iterata delle strategie non razionalizzabili* (*never best response*).
(ovvero: spingere ancor più sul pedale della razionalità)

Definition

Nel gioco Γ_N la strategia s_i è una risposta ottima (*best response*) per il giocatore i rispetto alle strategie degli altri giocatori s_{-i} se

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ per tutte } s'_i \in S_i$$

Definition

Una strategia s_i non è mai risposta ottima (*never a best response*) se non esiste alcun s_{-i} per il quale s_i sia una risposta ottima.

Qualsiasi sia l'aspettativa del giocatore i circa le strategie dei suoi avversari s_{-i} , una never best response è sempre peggiore di un'altra strategia. Quindi una never best response non può essere giustificata, qualsiasi siano le aspettative del giocatore sul comportamento degli altri.

Definition

Nel gioco Γ_N le strategie in S_i che sopravvivono all'eliminazione iterata delle strategie never best response sono definite come strategie razionalizzabili del giocatore i .

Il set di strategie razionalizzabili è un sottoinsieme del set delle strategie non strettamente dominate. Quindi l'insieme degli esiti ragionevoli del gioco si restringe.

Strategie Razionalizzabili III

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0,-2	0,0	10,-1

- Qual è l'insieme della strategie razionalizzabili?

Strategie Razionalizzabili III

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0,-2	0,0	10,-1

- Qual è l'insieme della strategie razionalizzabili?
- 1) b_4 è never best response; 2) a_4 diventa never best response

Strategie Razionalizzabili III

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0,-2	0,0	10,-1

- Qual è l'insieme della strategie razionalizzabili?
- 1) b_4 è never best response; 2) a_4 diventa never best response
- Qual è l'insieme delle strategie non dominate?

Strategie Razionalizzabili III

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0,-2	0,0	10,-1

- Qual è l'insieme della strategie razionalizzabili?
- 1) b_4 è never best response; 2) a_4 diventa never best response
- Qual è l'insieme delle strategie non dominate?
- non ci sono strategie strettamente dominate

Il terzo concetto di soluzione di un gioco in forma normale è quello di *Equilibrio di Nash*.

Equilibrio di Nash

Il concetto di Equilibrio di Nash è il concetto di soluzione più famoso e applicato

Definition

Un profilo strategico s è un equilibrio di Nash del gioco $\Gamma_N = (I; \{S_i\}; u_i(\cdot))$ se per ogni giocatore $i \in I$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ per tutte } s'_i \in S_i$$

- Ogni giocatore adotta la sua *best response*, non rispetto a un qualsiasi profilo strategico adottato dai suoi avversari, ma rispetto alle strategie giocate dai suoi avversari *in equilibrio*.
- Non basta solo la razionalità: il concetto di EN richiede che i giocatori *prevedano correttamente* quali strategie saranno adottate dagli avversari.
- In equilibrio di Nash, nessun giocatore ha un incentivo a deviare.

Equilibrio di Nash - Esempi

	<i>S</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>a</i>	4,4	5,3	1,2
<i>b</i>	3,2	4,5	3,6

	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>U</i>	3,4	4,6
<i>D</i>	2,6	5,4

Equilibrio di Nash III

- Ogni strategia parte di un equilibrio di Nash è razionalizzabile (è una best response): quindi ci sono almeno tanti esiti in strategie razionalizzabili quanti sono gli equilibri di Nash
- Possono esistere più equilibri di Nash (Bach vs Stravinsky). In questo caso l'assunzione di aspettative corrette è molto forte: i giocatori devono prevedere correttamente quale equilibrio sarà giocato, mentre la teoria dei giochi è incapace di "selezionare" un equilibrio.

	<i>B</i>	<i>S</i>
<i>B</i>	2, 1	0, 0
<i>S</i>	0, 0	1, 2

Definizione alternativa

Definition

La corrispondenza di risposta ottima (*best response correspondence*) del giocatore i , $b_i : S_{-i} \rightarrow S_i$ nel gioco $\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$ è la corrispondenza che assegna a ogni profilo $s_{-i} \in S_{-i}$ l'insieme delle risposte ottime di i

$$b_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u(s_i, s_{-i}) \geq u(s'_i, s_{-i}) \text{ for all } s'_i \in S_i\}$$

Definition

Il profilo (s_1, \dots, s_I) è un Equilibrio di Nash del gioco $\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$ se e solo se

$$s_i \in b_i(s_{-i}) \text{ per } i = 1, \dots, I$$

Il concetto di Equilibrio di Nash è ragionevole? Ecco alcune possibili giustificazioni

- Giocatori razionali devono necessariamente capire qual è l'esito ragionevole del gioco e devono giocarlo. (Falso: abbiamo visto che la razionalità consente solamente di identificare le strategie razionalizzabili)
- Se esiste un unico modo ovvio ed evidente per giocare, questo deve essere un equilibrio di Nash (giocatori razionali devono individuare questo modo ovvio e aspettarsi che anche i loro avversari lo individuino)
- Se un esito è un focal point questo è un equilibrio di Nash: certi esiti sono "attraattivi" per ragioni culturali, oppure potrebbero avere un qualche natural appeal (Shelling)

- L'equilibrio di Nash può essere pensato come un self-enforcing agreement (i giocatori comunicano prima del gioco, si accordano "senza impegno" su un esito e si aspettano che gli altri giochino secondo l'accordo - accordo credibile solo se non ci sono deviazioni profittevoli)
- L'equilibrio di Nash può essere visto come lo steady state di un processo di aggiustamento dinamico, dove i giocatori formano aspettative "ingenua" sul comportamento degli avversari (ad esempio: Cournot tatonnement - i giocatori si aspettano che l'avversario giochi oggi come ha giocato ieri).
- L'equilibrio di Nash come esito evolutivo: i geni determinano la strategia che un giocatore adotta (non ci sono più rational decision makers): la popolazione dei giocatori che scelgono le strategie sbagliate scompare