Introduzione alla Teoria dei Giochi

Giochi a informazione incompleta

Lorenzo Rocco

Scuola Galileiana - Università di Padova

8 aprile 2010

Il commitment - Un esempio

Player 1, the government, wishes to influence the choice of player 2. Player 2 chooses action $a_2 \in A_2 = \{0, 1\}$ and receives a transfer $t \in T = \{0, 1\}$ from the government which observes a_2. Players'2 objective is to maximize the expected value of his transfer, minus the cost of his action which is 0 for $a_2 = 0$ and $\frac{1}{2}$ for $a_2 = 1$. Player's 1 objective is to minimize the sum $2(a_2 - 1)^2 + t$. Before player 2 chooses his action, the government can annouce a transfer rule $t(a_2)$.
a) draw the extensive form for the case where the government's announcement is not binding and has no effect on payoffs.
b) draw the extensive form for the case where the government is constrained to implement the transfer rule it announced.
c) characterize the subgame perfect equilibria of the two games

Introduzione I

- Finora abbiamo ipotizzato che i giocatori avessero informazione completa sulle caratteristiche dell'avversario. In realtà in molti casi questa assunzione è troppo forte: ad esempio due imprese concorrenti non conoscono con precisione le strutture di costo dell'avversario.
- Tipicamente, si riassumono le caratteristiche di un giocatore nel suo tipo. Il payoff dipende dal tipo e quindi le strategie ottime possono variare con il tipo. Il proprio tipo è conosciuto da ogni giocatore, ma non dall'avversario.
- La Natura determina il tipo di ogni giocatore, come estrazione casuale dall'insieme dei tipi. La distribuzione di probabilità sopra l'insieme dei tipi è conoscenza comune.

Introduzione II

- Il modo più semplice per studiare i giochi con informazione incompleta (asimmetrica) è quello di trasformarli in giochi con informazione imperfetta, secondo l'approccio di Harsany (1969).
- Seguendo questo approccio, ogni tipo diventa un giocatore, la Natura sceglie chi deve giocare e l'avversario è incerto su chi sta giocando con lui, ovvero non ha osservato la mossa della Natura.

Gioco Bayesiano

Un gioco bayesiano è un gioco statico (= mosse simultanee) ed è definito formalmente da

$$\Gamma_B = [I, \{A_i\}, \{u_i\}, \Theta, F(.)]$$

dove

- A_i è l'insieme delle azioni disponibili ad ogni giocatore
- $u_i(a_i, a_{-i}, \theta_i)$ è la funzione di payoff
- $\theta_i \in \Theta_i$ è il tipo del giocatore, realizzazione di una variabile aleatoria
- $F : \Theta \to [0, 1]$ è la distribuzione congiunta sopra i profili dei tipi $\Theta_1 \times ... \times \Theta_I$

Decision Rule

Una strategia in un gioco bayesiano è chiamata "decision rule"

Definition

Una strategia è una funzione $s_i : \Theta_i \longrightarrow A_i$ che prescrive un azione per ogni possible tipo del giocatore.

Il set delle strategie è S_i

Payoff

In un gioco Bayesiano ogni giocatore ha una funzione di payoff $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$ dove $\theta_i \in \Theta_i$ è la realizzazione di una variaible aleatoria scelta dalla natura e osservata dal solo giocatore i .

Definition

Il payoff (ex-ante) atteso del giocatore i è

$$E_\theta \left[u_i(s_1(\theta_1), ..., s_I(\theta_I), \theta_i) \right] = \tilde{u}_i \left(s_1 \left(\cdot \right), ..., s_I \left(\cdot \right) \right)$$

dove la media è calcolata considerando la distribuzione dei profili di tipi.

- Nota: Partendo da ogni gioco Bayesiano possiamo definire un gioco in forma normale $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{\widetilde{u}_i\}]$

Equilibrio di Nash Bayesiano (BNE)

Definition

Un equilibrio di Nash Bayesiano in strategie pure è un profilo di strategie $(s_1(\cdot), ..., s_n(\cdot))$ che costituisce un equilibrio del gioco $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{\widetilde{u}_i\}]$, tale che per ogni giocatore $i \in I$

$$\tilde{u}_i(s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot)) \geq \tilde{u}_i\left(s_i'(\cdot), s_{-i}(\cdot)\right) \text{ per ogni } s_i' \in S_i$$

Il seguente teorema stabilisce l'equivalenza con un altra condizione (interim):

Theorem

Un profilo di strategie è un equilibrio di Nash Bayesiano se e solo se per ogni i e per ogni $\theta_i \in \Theta_i$ che si realizza con probabilità positiva

$$E_{\theta_{-i}}\left[u_i(s_1(\theta_1),\dots,s_n(\theta_n),\theta_i)\,|\theta_i\,)\right] \geq E_{\theta_{-i}}\left[u_i(s_i'(\theta_i),s_{-i}(\theta_{-i}),\theta_i)\,|\theta_i\,)\right]$$

per tutte le strategie $s_i' \in S_i$, dove la media è calcolata sulla distribuzione dei profili θ_{-i} e condizionale a θ_i.

Nota: possiamo pensare che il tipo di ogni giocatore i sia un giocatore "autonomo" che massimizza il suo payoff data la distribuzione condizionata di probabilità sulle strategie dei suoi rivali.

Applicazioni

- esempio 1
- esempio 2
- Cournot

Mercato dei limoni

Jerry wants to buy a used car and George wants to sell his car. The car can be in good shape (a peach) or in bad shape (a lemon). This information is known to George but not to Jerry; he only knows that the car is a peach with probaiblity q. If the car is a peach, then it is worth \$3000 to Jerry and \$2000 to George. If the car is a lemon, it is worth \$1000 to Jerry and \$0 to George. Both players, simultaneously and independently, choose whether to trade (T) or not (N); if they trade, Jerry pays p to George and receives the car.
Suppose $p = 500$. Determine all BNE.