Introduzione alla Teoria dei Giochi

Giochi Bayesiani Dinamici

Lorenzo Rocco

Scuola Galileiana - Università di Padova

15 aprile 2010

Giochi Bayesiani Dinamici

Al di fuori della classe dei giochi con informazione perfetta e multi-stage, il concetto di SPNE è scarsamente utile perché ci sono pochi sotto-giochi.

Esempio: entry-game esteso con due "modi" di entrare nel mercato non distinguibili dall'incumbent.
In tal caso non ci sono sotto-giochi propri, e quindi equilibri di Nash non credibili non sono eliminabili.
Introducendo formalmente le beliefs dei giocatori è possibile estendere l'applicabilità della sequental rationality e raffinare equilibri di Nash non credibili.
Nell'esempio, per qualsiasi belief dell'incumbent, "accomodate" domina "fight"

Beliefs

Definition

Un sistema di beliefs μ in un gioco in forma estesa Γ_E è una specificazione di probabilità $\mu(x) \in [0, 1]$ per ogni nodo decisionale x appartenente a un information set H, tale che

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

per ogni set informativo H di Γ_E.

Si tratta di una valutazione soggettiva della probabilità che il giocatore si trovi a muovere nel nodo x

Payoff atteso di continuazione

Trovandosi nell'insieme informativo H, il payoff che un giocatore si attende di ottenere dalla continuazione del gioco, date le sue beliefs μ e le strategie sue e dei suoi avversari s_i e s_{-i} (che specificano come continuare a giocare), è indicato da $E(u_i|H, \mu, s_i, s_{-i})$.
Esempio: nell'entry game, sia $\mu = \frac{1}{2}$, $s_E = in_1$, $s_I = accom$. Si ha

$$E(u_I|entered, \frac{1}{2}, accom., in_1) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}1$$

Definition

Un profilo di strategie $s = (s_1, ..., s_I)$ in un gioco in forma estesa Γ_E è sequentially rational nel set informativo H, dato un sistema di beliefs μ se, indicando con $\iota(H)$ il giocatore che muove in H, abbiamo

$$E(u_{\iota(H)}|H, \mu, s_{\iota(H)}, s_{-\iota(H)}) \geqslant E(u_{\iota(H)}|H, \mu, s'_{\iota(H)}, s_{-\iota(H)}) \text{ per ogni } s'_{\iota(H)} \in S_{\iota(H}$$

Se il profilo di strategie s soddisfa questa condizione in tutti gli information set, diremo che s è sequentially rational dato il sistema di beliefs μ.

In pratica si richiede che ad ogni information set, il giocatore che ha la mossa, stia massimizzando il payoff di continuazione, date le beliefs e le strategie degli altri.

Equilibrio Bayesiano Perfetto debole

Definition

Un profilo di strategie e un sistema di beliefs (s, μ) costituiscono un Equilibrio Bayesiano Perfetto debole (weak PBE) nel gioco in forma estesa Γ_E se possiedono le seguenti proprietà:
1) il profilo di strategie s è sequentially rational dato il sistema di beliefs μ
2) il sistema di beliefs è derivato dal profilo di strategie s attraverso la regola di Bayes quando possibile. Ovvero, per ogni information set H raggiunto con probabilità strettamente positiva, $\Pr(H|s) > 0$, deve valere che

$$\mu(x) = \frac{\Pr(x|s)}{\Pr(H|s)}$$

per tutti i nodi x in H.

Esempio

Joint Venture tra due imprese entranti: un'impresa può decidere se entrare in un mercato da sola, facendo un'alleanza con un'altra impresa, oppure rimanere fuori. Se entra da sola l'impresa è debole, se entra in tandem è forte. La potenziale alleata può accettare o meno l'offerta. L'incumbent osserva solo l'entrata, ma non osserva se l'impresa entra da sola o in tandem. L'incumbent deve decidere se combattere o essere accomodante.

Note I

- Questa definizione richiede non solo che le strategie siano ottimali date le beliefs, ma anche che le beliefs siano consistenti con le strategie d'equilibrio.
- Nota: Nei set informativi che non sono raggiunti dal sentiero di gioco, la regola di Bayes non può essere applicata e le beliefs sono arbitrarie. La giustificazione è che non ci possono essere beliefs ragionevoli (o più ragionevoli di altre) per porzioni del gioco che non sono mai raggiunte.
- L'aggettivo "debole" si riferisce proprio al fatto che le beliefs al di fuori del sentiero di gioco sono arbitrarie e non devono soddisfare alcun vincolo eccetto la non-negatività e la somma a 1.
- La libertà nella scelta delle beliefs off the equilibrium path genera spesso una molteplicità di equilibri. I raffinamenti al weak PBE consistono sempre in criteri che le beliefs off equilibrium devono soddisfare.

Note II

- Tuttavia il weak PBE è più forte dell'equilibrio di Nash, come indica il seguente teorema:

Theorem

Un profilo di strategie s è un equilibrio di Nash del gioco in forma estesa Γ_E *se e solo se esite un sistema di beliefs* μ *tale che*
1) il profilo di strategie s è sequenzialmente razionale dato il sistema di beliefs μ *in tutti gli information sets H tali che* $Pr(H|s) > 0$ *(ovvero in tutti e soli gli info set lungo il sentiero di equilibrio)*
2) Il sistema di beliefs è derivato dal profilo di strategie s usando, quando possibile, la regola di Bayes.

Quindi l'equilibrio di Nash richiede la sequential rationality solo lungo il sentiero di gioco non in tutti gli information set.

Weak PBE e SPNE

Tuttavia ottenere la sequential rationality off the equilibrium path è relativamente facile, dato che le beliefs sono arbitrarie. Infatti il weak PBE non è più forte dell' SPNE, a meno di ulteriori condizioni

Esempio: nell'entry game in cui prima l'entrant decide se entrare e poi entrant e incumbent decidono simultaneamente se combattere o essere accomodanti, l'unico SPNE è $[(in, accom), accom]$ mentre esite anche un altri weak PBE $[(out, accom), fight]$ with $\mu > \frac{2}{3}$ (precisamente sono infiniti weak PBE, uno per belief).

Nota: Ci sono vari modi per rafforzare il weak PBE. Ad esempio richiedere che (s, μ) portino a un weak PBE in ogni sottogioco implica che un Perfect Bayesian Equilibrium sia sempre anche SPNE. Nell'esempio il weak PBE non genera un weak PBE nel sottogioco proprio.

Forward induction

Un modo per rendere ragionevoli le beliefs off the equilibrium è la forward induction.
Avendo osservato una deviazione, un giocatore immagina che tale deviazione sia razionale e voluta (non un mero errore) e che quindi l'obiettivo sia quello di massimizzare i payoff successivi.

Esempio: Nell'entry game con weak PBE $[out, fight]$ con $\mu(in_1) = 1$, si fanno ragionamenti del tipo: "se l'entrant è entrato, allora certamente l'ha fatto per giocare in_2...". Quindi le beliefs devono essere $\mu(in_2) = 1$. Ma con queste off the equilibrium beliefs il weak PBE considerato crolla.

Ma cosa accade se la deviazione accade davvero per errore?

Giochi di segnalazione e di screening

Il concetto di (weak) PBE può essere applicato efficacemente anche a giochi dinamici con asimmetria informativa (informazione incompleta). In particolare in due classi di giochi:
1) i giochi di segnalazione
2) i giochi di screening

- Nei giochi di segnalazione chi ha l'informazione privata ha incentivo a segnalare alla parte non informata il suo tipo.
- Nei giochi di screening la parte non informata vuole indurre la parte informata a rivelare il suo tipo.

Giochi di segnalazione

Descrizione:

- La Natura muove e sceglie il tipo per il giocatore 1, $\theta_1 \in \Theta$
- La distribuzione dei tipi $F(\theta_1)$ è conoscenza comune
- Il giocatore 1 (emittente), osservato il suo tipo, sceglie un'azione $m \in M$ (messaggio)
- Dopo avere osservato l'azione del giocatore 1, i giocatori 2, .., I (riceventi) simultaneamente scelgono un'azione $r_i \in R_i$ (risposta).
- Per il giocatore 1, una strategia è una funzione $a : \Theta \longrightarrow M$
- Per i giocatori 2, ..., I una strategia è una funzione $s_i : M \longrightarrow R_i$
- I payoff sono definiti sulle strategie

Esempi

- the Ph.D. Admission Game
- a simple signalling Game

Raffinamenti I

Le beliefs off the equilibrium sono arbitrarie e consentono di sostenere molti equilibri pooling. Come rendere ragionevoli queste beliefs?

Ci sono svariati raffinamenti possibili del weak PBE che possono essere adottati per i giochi di segnalazione.
I più semplici sono i seguenti:
1) congetture passive: se la probabilità di commettere un errore è indipendente dal tipo, quando si raggiunge un information set esterno al sentiero di equilibrio, la probabilità di ciascun tipo corrisponde alla prior ($=$ distribuzione originaria dei tipi)

Esempio: nel Ph.D. Admission Game, $\mu(hater) = 0.9$ nell'equilibrio $[(NA; NA), reject]$

Raffinamenti II

2) complete rubustness: le strategie di equilibrio sono completamente robuste se sono best responses qualsiasi siano le beliefs off-the-equilibrium (ovvero indipendentemente dalle beliefs)

Esempio: nel Ph.D. Admission Game, l'equilibrio $[(NA; NA), reject]$ vale solo se $\mu > \frac{2}{3}$, quindi non per qualsiasi out-of-equilibrium belief.

Raffinamenti III

3) criterio intuitivo (Cho, Kreps, 1987) o "equilibrium dominance": se esistono tipi del giocatore informato che sarebbero danneggiati da una deviazione dal sentiero di equilibrio, qualsiasi siano le beliefs del giocatore non-informato, allora la probabilità da assegnare a questi tipi off-the-equilibrium è zero (la strategia di equilibrio domina sulle deviazioni).

Esempio: nel Ph.D. Admission Game, l'equilibrio $[(NA; NA), reject]$ con $\mu > \frac{2}{3}$, non è consistente con il criterio intuitivo perché il tipo hater non trova mai conveniente deviare da NA ad A qualsiasi siano le beliefs dell'università. Quindi $\mu(hater) = 0$.

Esempio: nel simple signalling game, t_2 non ha mai interesse a deviare, quindi $\mu(t_1) = 1$ e tutti gli equilibri pooling vengono depurati

Nota

- Negli equilibri separating, ogni tipo sceglie un messaggio diverso. Se il numero dei tipi coincide con il numero dei messaggi possibili, ogni set informativo è raggiunto dal percorso del gioco. Non ci sono beliefs off-the-equilibrium. Solo negli equilibri pooling è possibile che alcuni set informativi non vengano raggiunti e solo in tal caso i raffinamenti "mordono".
- Se il numero di messaggi possibili supera il numero dei tipi, anche separating equilibria possono essere raffinati

Esempio: 2 tipi - 3 messaggi.

Modello di segnalazione di Spence (1973) I

- Ci sono due tipi di lavoratori, quelli con alta (θ_H) e bassa (θ_L) produttività innata. La proporzione degli high è λ.
- Le imprese che competono tra loro sul mercato non sono in grado di osservare l' "abilità", nè esiste un test sicuro per misurarla.
- C'è un problema di incentivi: i lavoratori high vorrebbero segnalare il loro tipo, mentre i low vorrebbero dichiararsi high.

Modello di segnalazione di Spence (1973) II

- Tuttavia esiste il modo di segnalare correttamente il proprio tipo. Il signalling device è rappresentato dall'istruzione. Estremizzando, l'istruzione non aggiunge nulla al capitale umano e quindi alla produttività del lavoratore.
- Prima di entrare nel mercato, i lavoratori possono acquisire un certo livello di istruzione che è osservabile da tutti.
- La funzione di costo dell'istruzione ha le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} c(0,\theta) &= 0 \quad c_e(e,\theta) > 0 \quad c_{ee}(e,\theta) > 0 \\ c_\theta(e,\theta) &< 0 \quad c_{e\theta}(e,\theta) < 0 \end{aligned}$$

Intuitivamente, il tipo high ha un vantaggio a segnalarsi, in quanto il segnale gli costa meno che al tipo low (il segnale istruzione è costoso, non è cheap talk).

Modello di segnalazione di Spence (1973) III

- Il payoff dei lavoratori è

$$u(w, e, \theta) = w - c(e, \theta)$$

- L'outside option di entrambi i tipi è uguale e nulla, quindi i lavoratori accetterranno sempre un salario positivo associato a istruzione nulla.
- Nel mercato operano due imprese, che competono per massimizzare i profitti. Offrono simulataneamente un salario.
- Assumiamo che le imprese abbiano le stesse aspettative $\mu(e)$ riguardo al tipo del lavoratore quando osservano il livello di istruzione e. Grazie a questa condizione, un weak PBE diventa un PBE.
- Senza possibilità di segnalazione l'unico equilibrio competitivo è quello in cui il salario è pari alla produttività media, i.e. $w^* = E(\theta)$

Modello di segnalazione di Spence (1973) IV

- Partendo dalla fine le imprese offrono un salario, avendo osservato e. Poiché le imprese giocano simultaneamente, le imprese offrono la produttività attesa:

$$w = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$$

- Anticipando la wage schedule, il lavoratore decide che livello di istruzione acquisire, dato il suo tipo.

Modello di segnalazione di Spence (1973) V

Distinguiamo tra equilibri separating e pooling:
Equilibri separating: i diversi tipi acquisiscono diversi livelli di istruzione.
I seguenti lemmi caratterizzano gli equilibri separating

Lemma

In ogni separating PBE, $w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H$ e $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$, cioè ogni tipo riceve un salario pari al suo livello di produttività.

Proof.

Poiché l'equilibrio è separating, quando le imprese osservano $e^*(\theta_H)$ inferiscono che stanno di fronte a un tipo θ_H e quindi $\mu(e^*(\theta_H)) = 1$. Perciò $w^* = \theta_H$. Simmetricamente quando le imprese osservano $e^*(\theta_L)$. □

Modello di segnalazione di Spence (1973) VI

Lemma

In ogni equilibrio separating $e^*(\theta_L) = 0$, cioè un tipo θ_L sceglie di non acquisire istruzione.

Proof.

Poiché l'istruzione è costosa e sapendo che $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$ in equilibrio qualunque sia l'istruzione acquisita, la strategia ottima per θ_L è $e^*(\theta_L) = 0$. □

Definiamo $e^*(\theta_H) = \widetilde{e}$. Le aspettative compatibili con la wage-schedule proposta devono essere

$$\mu(e) = \frac{w(e) - \theta_L}{\theta_H - \theta_L}$$

che in equilibrio, diventano $\mu(e = 0) = 0$ e $\mu(e = \widetilde{e}) = 1$.

Modello di segnalazione di Spence (1973) VII

- Affinché un equilibrio separating sia tale, si deve impedire che sia conveniente deviare.

Abbiamo visto che in equilibrio deve essere $e^*(\theta_L) = 0$, $w(0) = \theta_L$ e $e^*(\theta_H) = \widetilde{e}$, $w(\widetilde{e}) = \theta_H$. Se $\widetilde{e}$ fosse troppo basso, θ_L potrebbe trovare conveniente acquisire il livello di istruzione $\widetilde{e}$ al fine di indurre le imprese a crederlo un tipo θ_H. Si deve allora imporre che

$$u(\theta_L, 0, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L) \geqslant u(\theta_H, \widetilde{e}, \theta_L) = \theta_H - c(\widetilde{e}, \theta_L)$$

La soluzione di questa equazione offre il livello minimo di $\widetilde{e}$ impedisce a θ_L di deviare.

La condizione di single-crossing delle preferenze assicura che θ_H non abbia incentivo a deviare (vedi figura).

- Nota: livelli di istruzione $\widetilde{e}' > \widetilde{e}$ possono fare parte di equilibri PBE con aspettative "pessimiste" out-of-equilibrium riguardo alla probabilità di osservare un tipo θ_H

Modello di segnalazione di Spence (1973) VIII

Equilibri pooling: tutti i tipi acquisiscono lo stesso livello di istruzione, cioé $e^*(\theta_L) = e^*(\theta_H) = e^*$
Osservando e^* le imprese non possono aggiornare le loro beliefs e quindi $\mu(e^*) = \lambda$. La corrispondente wage schedule è

$$w^*(e^*) = \lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L = E(\theta)$$

Il livello di istruzione non può essere troppo elevato, altrimenti il tipo θ_L avrebbe incetivo a deviare e scegliere $e = 0$. Il massimo livello di istruzione supportabile come equilibrio pooling è dato da

$$u(E(\theta), e, \theta_L) = E(\theta) - c(e, \theta_L) \geqslant u(\theta_L, 0, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$$

(vedi figura)

Modello di segnalazione di Spence (1973) IX

- Nota: il livello $e = 0$ è compatibile con un equilibrio pooling. E' l'equilibrio Pareto ottimale, coincidente con il caso di non segnalazione
- Nota: ci sono moltissimi equilibri in questo modello, sia separating che pooling.
- Nota: usando il criterio intuitivo, gli equilibri separating con $\tilde{e}' > \tilde{e}$ possono essere eliminati: questi equilibri assumono implicitamente che quando le imprese osservano $\tilde{e} < \hat{e} < \tilde{e}'$, $\mu(\hat{e}) < 1$, quindi assegnano una probabilità positiva a θ_L. In realtà per θ_L deviare da $e = 0$ a $e = \hat{e}$ è una dominato. Quindi $\mu(\hat{e}) = 1$ e $w(\hat{e}) = \theta_H$. Ma allora il tipo θ_H vorrebbe deviare su $\hat{e}$ (vedi figura).

Quindi l'unico equilibrio separating che sopravvive è quello con $e = \tilde{e}$. Anche tutti i pooling equilibia possono essere cancellati: ogni deviazione da e^* verso $\hat{e}$ è dominata per il tipo θ_L. Quindi $\mu(\hat{e}) = 1$ e $w(\hat{e}) = \theta_H$. Ma allora il tipo θ_H vorrebbe deviare su $\hat{e}$ (vedi figura)

L'unico equilibrio che sopravvive è allora il separating con istruzione $e(\theta_L) = 0$ e $e(\theta_H) = \widetilde{e}$.

- Nota: l'equilibrio separating non dipende dalla proporzione di high-type λ. Anche se ci sono pochi low-type, tutti gli high-type hanno l'incentivo a acquisire istruzione per segnalarsi.
- Nota: senza segnalazione tutti i lavoratori ottengono $E(\theta)$ e non doveno spendere per l'istruzione. Segnalando, i tipi θ_L stanno peggio. I tipi θ_H ottengono un salario più elevato, ma potrebbero stare peggio a causa dei costi dell'istruzione. Questo è particolarmente vero se λ è prossimo a 1. Nonostante il guadagno di efficienza connesso alla segnalazione, l'equilibrio di segnalazione potrebbe essere Pareto-dominato.